Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

WS 2007/08
28.11.2007
Blatt 07

Übungen zu „Mathematik III für Physiker“

1. Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf einem reellen Vektorraum V heißen *äquivalent*, wenn es Konstanten $a, b > 0$ gibt, so dass für alle $x \in V$ gilt:

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$$

   Zeigen Sie:

   (a) Sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalente Normen auf einem Vektorraum V und sind d_1 bzw. d_2 die von $\|\cdot\|_1$ bzw. $\|\cdot\|_2$ induzierten Metriken auf V, so ist eine Teilmenge $U \subseteq V$ genau dann bzgl. d_1 offen, wenn sie es bzgl. d_2 ist.

   (b) Sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalente Normen auf einem Vektorraum V, so ist $(V, \|\cdot\|_1)$ genau dann ein Banachraum, wenn $(V, \|\cdot\|_2)$ es ist.

2. (a) Zeigen Sie, dass die Addition $\mathrm{add}\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$ und Multiplikation $\mathrm{mult}\colon \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(x, y) \mapsto xy$ stetige Funktionen sind.

   (b) Sei X ein metrischer Raum. Zeigen Sie dass eine Abbildung $f\colon X \to \mathbf{R}^n$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, genau dann stetig ist, wenn ihre Komponenten $f_i\colon X \to \mathbf{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ es sind.

3. Zeigen Sie: Ist (f_n) eine Cauchy-Folge in $(\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ und ist $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$, $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, so konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f.

Abgabe: Mittwoch, 5. Dezember 2007, 9.00 Uhr