Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

WS 2007/08
05.12.2007
Blatt 08

Übungen zu „Mathematik III für Physiker“

1. Sei l^2 der Raum der quadratintegrierbaren reellen Zahlenfolgen.
   (a) Sei (für jedes $n \in \mathbf{N}$) $e_n \in l^2$ die Zahlenfolge, die an der n-ten Stelle eine 1 und sonst Nullen hat. Zeigen Sie: $\|e_n\| = 1$ und für $n \neq m$ ist $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$.
   (b) Zeigen Sie, dass $\overline{B_1(0)} = \{x = (x_n) \in l^2 : \|x\| \leq 1\}$ zwar beschränkt und abgeschlossen, nicht aber kompakt ist. (Hinweis: Die Folge $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ in l^2 liegt in $\overline{B_1(0)}$, hat aber keinen Häufungspunkt.)

2. Zeigen Sie: Ist ein metrischer Raum X kompakt (d. h. X ist als Teilmenge von X kompakt), so ist X vollständig.

3. Sei $Y \subseteq \mathbf{R}^n$ eine Teilmenge, die nicht kompakt ist. Zeigen Sie, dass es eine stetige Funktion $f\colon Y \to \mathbf{R}$ gibt, die ihr Supremum nicht annimmt. (Hinweis: Untersuchen Sie die Fälle, wo Y nicht beschränkt bzw. nicht abgeschlossen ist, und betrachten Sie geeignete Abstandsfunktionen.)

4. (a) Berechnen Sie die Gradienten der folgenden (partiell differenzierbaren) Funktionen f auf $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ und g auf $\mathbf{R}^2$:
   $$f(x,y) = y\sqrt{2x^2+y^2}, \quad g(x,y) = x\exp(x^2-y^2)$$
   (b) Berechnen Sie die Divergenz der folgenden (partiell differenzierbaren) Vektorfelder v und w auf $\mathbf{R}^2$:
   $$v(x,y) = (x^2-y^2, x^2+y^2), \quad w(x,y) = (\ln(1+x^2+y^2), \exp(1+x^2+y^2))$$

Abgabe: Mittwoch, 12. Dezember 2007, 9.00 Uhr