Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

WS 2007/08
12.12.2007
Blatt 09

Übungen zu „Mathematik III für Physiker“

1. Sei $G \subseteq \mathbf{R}^n$ ein Gebiet.

   (a) Zeigen Sie für eine (partiell differenzierbare) Funktion f und ein (partiell differenzierbares) Vektorfeld v auf G:

   $$\operatorname{div}(fv) = \langle \operatorname{grad}(f), v\rangle + f\operatorname{div}(v)$$

   (b) Zeigen Sie für zweimal partiell differenzierbare Funktionen f und g auf G:

   $$\Delta(fg) = \Delta(f)g + 2\langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(g)\rangle + f\Delta(g)$$

2. Sei $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ gegeben durch $f(0,0) = 0$ und

   $$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

   für $(x,y) \neq (0,0)$. Zeigen Sie, dass f partiell differenzierbar (auf ganz $\mathbf{R}^2$) ist, aber unstetig in $(x,y) = (0,0)$.

3. Sei $G \subseteq \mathbf{R}^n$ ein Gebiet. Eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $f\colon G \to \mathbf{R}$ heißt *harmonisch*, wenn sie der folgenden *Potentialgleichung* genügt:

   $$\Delta f = 0$$

   Zeigen Sie: Für $n \neq 2$ ist $f\colon \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \|x\|^{-n+2}$ und für $n = 2$ ist $g\colon \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \ln(\|x\|)$ harmonisch.

4. Sei $f\colon \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $f(t,x) = t^{-n/2}\exp(-\frac{\|x\|^2}{4t})$. Mit Δ bezeichnen wir den Laplace-Operator bzgl. der x-Variablen. Zeigen Sie: f genügt der folgenden *Wärmeleitungsgleichung*:

   $$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f$$

Abgabe: Mittwoch, 19. Dezember 2007, 9.00 Uhr