Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

WS 2007/08
19.12.2007
Blatt 10

Übungen zu „Mathematik III für Physiker“

1. Sei $G \subseteq \mathbf{R}^n$ ein Gebiet, $x \in G$ und $v \in \mathbf{R}^n$ mit $\|v\| = 1$. Wir sagen, dass eine Funktion $f\colon G \to \mathbf{R}$ *in x in Richtung v partiell differenzierbar* ist, wenn der Grenzwert
$$D_v f(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$
existiert. Zeigen Sie: Ist f in x (total) differenzierbar, so ist f in x in alle Richtungen v partiell differenzierbar und es gilt: $D_v f(x) = Df(x)v$.

2. Sei $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ gegeben durch
$$f(r, \vartheta, \varphi) = (r \sin\vartheta \cos\varphi, r \sin\vartheta \sin\varphi, r \cos\vartheta).$$
Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f in jedem Punkt (r, ϑ, φ).

3. Seien V und W endlich-dimensionale, normierte Vektorräume. Zeigen Sie, dass die Operatornorm auf $\mathrm{Hom}(V, W)$ tatsächlich eine Norm bildet.

4. Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf $\mathbf{R}^n$. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent sind. (Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbf{S}^{n-1} \to \mathbf{R}_+$, $x \mapsto \frac{\|x\|_2}{\|x\|_1}$. Nimmt diese ihr Supremum b und ihr Infimum a an?)

Abgabe: Mittwoch, 9. Januar 2008, 9.00 Uhr

Frohe Weihnachten und ein Gutes Neues Jahr