Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

WS 2007/08
16.01.2008
Blatt 12

Übungen zu „Mathematik III für Physiker“

1. Sei $G = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0,\, y > 0\}$ und $f\colon G \to \mathbf{R}$ gegeben durch
$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}.$$
Bestimmen Sie das Taylor-Polynom von f vom Grad 2 im Punkt $(1, 1)$.

2. Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,
$$f(x, y) = (4x^2 + y^2)\exp(x^2 + 4y^2),$$
genau ein lokales Minimum hat.

3. Sei $P\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ eine Polynomfunktion vom Grad höchstens $k \in \mathbf{N}$, also
$$P(x) = \sum_{|\alpha| \le k} c_\alpha x^\alpha,$$
für alle $x \in \mathbf{R}^n$ mit $c_\alpha \in \mathbf{R}$, für alle $|\alpha| \le k$.
   (a) Zeigen Sie, dass für $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$ mit $|\alpha| \le k$ gilt:
   $$D^\alpha P(0) = \alpha! c_\alpha.$$
   (b) Ist $Q\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ eine weitere Polynomfunktion, $Q(x) = \sum d_\alpha x^\alpha$, so dass $P(x) = Q(x)$ ist, für alle $x \in \mathbf{R}^n$, so zeigen Sie, dass $c_\alpha = d_\alpha$ sein muss, für alle α. (Hinweis: Benutzen Sie Teil (a).)

4. Sei $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \subseteq \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ die (offene) Menge der invertierbaren Matrizen und $F\colon \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ gegeben durch $F(A) = A^{-1}$. Zeigen Sie, dass das Differential von F in $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, $DF(A)\colon \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$, gegeben ist durch
$$DF(A)B = -A^{-1}BA^{-1}.$$
(Hinweis: Ist $G(A) = A$ auf $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$, so gilt für alle $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$: $F(A)G(A) = \mathbf{1}$.)

Abgabe: Mittwoch, 23. Januar 2008, 9.00 Uhr