Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

WS 2007/08
30.01.2008
Blatt 14

Übungen zu „Mathematik III für Physiker“

1. Sei $\mathbf{R}_+ = (0, \infty)$ und $f\colon \mathbf{R}_+^3 \to \mathbf{R}_+^3$ gegeben durch
$$f(x, y, z) = (x, xy, xyz)$$
Zeigen Sie, dass f ein Diffeomorphismus ist.

2. Sei $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f(r, \vartheta, \varphi) = (r \sin\vartheta \cos\varphi, r \sin\vartheta \sin\varphi, r \cos\vartheta)$ (vgl. Blatt 10, Aufgabe 2). Geben Sie (möglichst große) Gebiete $G, D \subseteq \mathbf{R}^3$ an, so dass $f(G) = D$ und $f|G\colon G \to D$ ein Diffeomorphismus ist.

3. Sei $G = D = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ und $f\colon G \to D$, $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Zeigen Sie, dass $Df(x, y)$ invertierbar ist, für alle $(x, y) \in G$, aber f kein Diffeomorphismus von G auf D. (Hinweis: f ist nicht injektiv.)

4. (a) Seien $G \subseteq \mathbf{R}^n$ und $D \subseteq \mathbf{R}^m$ Gebiete. Sei $f\colon G \to D$ ein Diffeomorphismus (also f bijektiv, f und f^{-1} stetig differenzierbar). Warum muss dann $n = m$ sein? (Hinweis: Betrachten Sie $Df(x)$ für ein $x \in G$.)

   (b) Sei $G \subseteq \mathbf{R}^n$ ein Gebiet, $f\colon G \to \mathbf{R}^n$ stetig differenzierbar und $Df(x)$ invertierbar für alle $x \in G$. Warum muss dann $D := f(G) \subseteq \mathbf{R}^n$ wieder ein Gebiet sein? (Hinweis: Umkehrsatz)

Abgabe: Mittwoch, 6. Februar 2008, 9.00 Uhr