Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

WS 2007/08
06.02.2008
Blatt 15

Übungen zu „Mathematik III für Physiker“

1. Bestimmen Sie das Maximum der Funktion $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = xy$, unter der Nebenbedingung $x^4 + y^4 = 1$.

2. Sei $G \subseteq \mathbf{R}^n$ ein Gebiet und $h\colon G \to \mathbf{R}$ stetig differenzierbar. Sei $c \in \mathbf{R}$ derart, dass die Niveaufläche $N_c = \{x \in G : h(x) = c\}$ von h nicht leer ist und sei $a \in N_c$. Zeigen Sie, dass der Gradient von h in a in folgendem Sinn senkrecht auf N_c in a steht: Ist $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to N_c \subseteq \mathbf{R}^n$ eine (stetig differenzierbare) Kurve auf N_c ($\varepsilon > 0$) mit $\alpha(0) = a$, so gilt:
$$\langle \dot{\alpha}(0), \mathrm{grad}(h)(a) \rangle = 0$$

3. Seien $a, b > 0$ und $K \subseteq \mathbf{R}^2$ gegeben durch
$$K = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$$
Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion $f\colon K \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = xy$.

4. Sei $A \in \mathrm{Sym}_n(\mathbf{R})$ eine reelle, symmetrische $n \times n$-Matrix und $q\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ die zugehörige quadratische Form, $q(x) = \langle x, Ax \rangle$. Zeigen Sie:
   (a) $\mathrm{grad}(q)(x) = 2Ax$,
   (b) ist $\lambda \in \mathbf{R}$ das Maximum von q unter der Nebenbedingung $\|x\|^2 = 1$, so ist λ ein Eigenwert von A.

Abgabe: Mittwoch, 13. Februar 2008, 9.00 Uhr