Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

WS 2008/09
20.10.2008
Blatt 02

Übungen zu „Lineare Algebra I“

1. Seien M und N Mengen und $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Zeigen Sie:
   (a) Für alle $B_1, B_2 \subseteq N$ gilt:
   $$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2), \quad f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$
   (b) Für alle $A_1, A_2 \subseteq M$ gilt:
   $$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2), \quad f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$
   (c) Geben Sie ein Beispiel an, wo $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ ist.

2. Welche der folgenden drei Abbildungen sind injektiv und welche surjektiv? (Beweisen Sie Ihre Aussagen.)
   $$f_1 : \mathbf{N} \to \mathbf{N},\ f_1(n) = 2n, \quad f_2 : \mathbf{Q} \to \mathbf{R},\ f_2(q) = 2q, \quad f_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f_3(x) = x^2.$$
   Folgern Sie mit f_1, dass die geraden Zahlen gleichmächtig zu den natürlichen Zahlen sind. (Umgangssprachlich gesagt: Es gibt es genauso viele gerade Zahlen wie natürliche Zahlen.)

3. (a) Sei M eine Menge und $N \subseteq M$ und $i : N \to M$ die Inklusion. Zeigen Sie, dass i injektiv ist.
   (b) Sei M eine Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M, $Q := M/\sim$ und $\pi : M \to Q$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie, dass π surjektiv ist

4. Seien M und N Mengen, $f : M \to N$ eine Abbildung. Zeigen Sie:
   (a) f ist genau dann injektiv, wenn es eine Abbildung $g : N \to M$ gibt mit $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{M}}$.
   (b) f ist genau dann surjektiv, wenn es eine Abbildung $h : N \to M$ gibt mit $f \circ h = \mathrm{id}_{\mathrm{N}}$.

Abgabe: Montag, 27. Oktober 2008, 10.15 Uhr