Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

WS 2008/09
27.10.2008
Blatt 03

Übungen zu „Lineare Algebra I“

1. (Hilberts Hotel) Das „Hilbert–Hotel“ soll abzählbar unendlich viele Zimmer (kurz : ω) besitzen, welche aber alle bereits belegt sind. Eines Tages kommt ein erschöpfter Wanderer vorbei, der dringend eine Bleibe benötigt. Der gutmütige Hotelbesitzer zögert nicht lange, und da er etwas von Mengenlehre versteht, hat er auch bereits eine Lösung seines Problems: Jedes der Zimmer ist durchnummeriert, angefangen bei 1. Nun bittet der Hotelbesitzer den Gast mit der Zimmernummer 1 in das Zimmer mit der Nummer 2 umzuziehen, und den Gast aus Zimmer 2 bittet er nach Zimmer 3, usw. Somit bekommen alle einquartierten Gäste ein Zimmer und das Zimmer 1 steht nun bereit für seinen Wanderer! Das war einfach, dachte sich der Hotelbesitzer, bis er mit den folgenden Situationen konfrontiert wird:

   (a) es kommen endlich viele weitere Besucher, die dringend eine Unterkunft benötigen;
   (b) es kommt ein ganzer Bus mit ω vielen Besuchern;
   (c) es kommt eine Kolonne von ω solchen Bussen;
   (d) es kommen ω solcher Kolonnen.

   Der Hotelbesitzer ist verzweifelt, denn er will keinen Gast, der bereits ein Zimmer hat, bitten auszuziehen. Können Sie ihm in jeder der Situationen helfen?

2. Sei M eine nicht–leere Menge.

   (a) Zeigen Sie, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ mächtiger ist als M.
   (b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}(M)$ nicht gleichmächtig zu M ist. (Hinweis: Beweisen Sie, dass eine beliebige Abbildung $f\colon M \to \mathcal{P}(M)$ nicht surjektiv ist. Prüfen sie dazu nach, dass die Menge $A_f := \{a \in M : a \notin f(a)\} \in \mathcal{P}(M)$ nicht im Bild von f liegt. Folgern Sie daraus die Behauptung.)

3. (Paul Erdos) Beweisen Sie: Auf jeder Party mit mindestens zwei Gästen gibt es mindestens 2, die eine gleiche Anzahl an Leuten auf dieser Party kennen. Dabei bedeutet hier „sich kennen“, dass wenn ein Gast A einen anderen Gast B kennt, dann kennt der Gast B auch den Gast A. (Hinweis: Sei $n \in \mathbf{N}$ $(n \neq 1)$ die Anzahl der Gäste auf der Party. Betrachten Sie die Abbildung $f\colon \{1, \dots, n\} \to \{0, \dots, n-1\}$), so dass die Zahl $f(i)$ angibt, wieviele Gäste der Gast i auf der Party kennt. Benutzen Sie auch, dass Abbildungen zwischen gleichmächtigen endlichen Mengen genau dann bijektiv sind, wenn sie injektiv sind.)

4. Seien M, N Mengen und $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Beweisen Sie, dass es eine Menge Q und Abbildungen $\pi\colon M \to Q$, $g\colon Q \to N$ gibt, so dass π surjektiv, g injektiv ist, und dass $f = g \circ \pi$ gilt. (Hinweis: Finden Sie auf M eine geeignete Äquivalenzrelation $\sim$, definieren Sie $Q := M/\sim$ und $\pi : M \to Q$ die kanonische Projektion.)

Finden Sie außerdem etwas über die Personen *David Hilbert* und *Paul Erdos* heraus.

Abgabe: Montag, 3. November 2008, 10.15 Uhr