Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

WS 2008/09
3.11.2008
Blatt 04

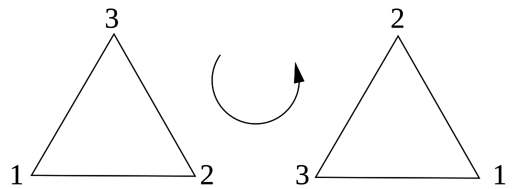
Übungen zu „Lineare Algebra I“

1. Definieren Sie auf $G = \{0, a\}$ $(a \neq 0)$ eine Verknünpfung $+$, so dass $(G, +)$ zu einer Gruppe wird. (Beweisen Sie dabei, dass ihre Verknüpfung die Gruppenaxiome erfüllen)

2. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Beweisen Sie, dass folgende Regeln für $a, b, c \in G$ gelten:
   (a) Aus $ab = ac$ folgt $b = c$,
   (b) $(a^{-1})^{-1} = a$,
   (c) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

3. Sei G eine abelsche Gruppe und H eine Untergruppe von G. Zeigen Sie, dass Folgendes eine Äquivalenzrelation auf G ist: $a \sim b$, genau dann wenn $a - b \in H$ ist, wobei $a, b \in G$. Wie sehen die Äquivalenzklassen aus?

4. (a) Betrachten Sie ein gleichseitiges Dreieck und nummerieren Sie die Ecken von 1 bis 3 durch. Überlegen Sie sich, welche geometrischen Operationen (Drehungen, Spiegelungen) das Dreieck wieder auf sich überführen. Geben Sie diese Operation dadurch an, indem Sie angeben, welche Ecken auf welche Ecken abgebildet werden. Betrachten wir ein Beispiel



   Diese Drehung können wir dann als Permutation von 3 Zahlen ansehen:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_3.$$

   Schreiben Sie alle Permutation auf, die auf diese Weise entstehen. (Diese Elemente bilden eine Gruppe, die so genannte *Diedergruppe* D_3. Kennen Sie diese Gruppe?)

   (b) Betrachten Sie nun ein Quadrat. Schreiben Sie alle Permutationen auf, welche sich durch Bewegungen ergeben, die das Quadrat in sich überführen. Diese bilden die so genannte *Diedergruppe* D_4. (Begründen Sie anschaulich, dass es sich nicht um die $\mathfrak{S}_4$ handelt.)

Abgabe: Montag, 10.November 2008, 10.15 Uhr