Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

WS 2008/09
10.11.2008
Blatt 05

Übungen zu „Lineare Algebra I“

1. Zeigen Sie, dass eine natürliche Zahl n genau dann durch 11 teilbar ist, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist. (Hinweis: ist $n = \sum_{j=0}^{r} 10^j a_j$, $a_j \in \{0, \dots, 9\}$, so ist $\sum_{j=0}^{r}(-1)^j a_j$ die alternierende Quersumme von n.)

2. Sei G eine endliche Gruppe und $n := \#G$. Zeigen Sie: Ist $H \subseteq G$ eine Untergruppe, so muss $k := \#H$ ein Teiler von n sein. (Hinweis: Definieren Sie eine geeignete Äquivalenzrelation auf G und beachten Sie, dass G nicht unbedingt abelsch sein muss.)

3. (a) Zeigen Sie, dass eine Gruppe mit 3 Elementen bereits abelsch ist und isomorph zur $\mathbf{Z}_3$.

   (b) Zeigen Sie, dass $\mathbf{Z}_4 \ncong \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ ist. (Gibt es weitere Gruppen mit 4 Elementen?)

4. (Homomorphiesatz für abelsche Gruppen) Sei $f\colon G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus zwischen zwei abelschen Gruppen G und G'. Sei $H := \ker f$ und $\pi\colon G \to G/H$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie, dass es genau einen Homomorphismus $\bar{f}\colon G/H \to G'$ gibt, mit der Eigenschaft $\bar{f} \circ \pi = f$.

Abgabe: Montag, 17.November 2008, 10.15 Uhr