Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

WS 2008/09
17.11.2008
Blatt 06

Übungen zu „Lineare Algebra I“

1. Zeigen Sie, dass $\mathbf{F}_2 := \{0, 1\}$ mit $+$ und $\cdot$ (definiert durch die Verknüpfungstafeln aus der Vorlesung) ein Körper ist.

2. Wir betrachten die Menge $M := \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \setminus \{0\})$. Für $(a, b), (c, d) \in M$ definieren wir eine Äquivalenzrelation: $(a, b) \sim (c, d)$ genau dann wenn $ad = bc$. Setze $\mathbf{Q} := M/\sim$ und $[a, b] + [c, d] := [ad + bc, bd]$ sowie $[a, b] \cdot [c, d] := [ac, bd]$.
   (a) Zeigen Sie, dass $\sim$ tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist.
   (b) Zeigen Sie, dass $+$ und $\cdot$ wohldefiniert sind.
   (c) Zeigen Sie, dass $(\mathbf{Q}, +, \cdot\,)$ ein Körper ist.

3. Beweisen Sie, dass $\mathbf{Q}(\sqrt{2}) := \{p + q\sqrt{2} \in \mathbf{R} : p, q \in \mathbf{Q}\}$ ein Unterkörper von $\mathbf{R}$ ist. (Hinweis: Benutzen Sie dabei, dass $\sqrt{2}$ irrational ist.)

4. Setze $\mathbf{H} := \mathbf{C}^2$ und definiere für $(z_1, z_2), (w_1, w_2) \in \mathbf{H}$,
   $$(z_1, z_2) + (w_1, w_2) := (z_1 + w_1, z_2 + w_2), \quad (z_1, z_2) \cdot (w_1, w_2) := (z_1 w_1 - z_2 \bar{w}_2, z_1 w_2 + z_2 \bar{w}_1).$$
   Ferner setzen wir $\mathbf{1} := (1, 0)$, $\mathbf{i} := (i, 0)$, $\mathbf{j} := (0, 1)$ und $\mathbf{k} := (0, i)$.
   (a) Berechne $\mathbf{i}^2$, $\mathbf{j}^2$, $\mathbf{k}^2$ sowie $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}$ und $\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}$.
   (b) Geben Sie zu $\mathbf{z} := (z_1, z_2) \in \mathbf{H} \setminus \{(0, 0)\}$ ein Element $\mathbf{w} := (w_1, w_2) \in \mathbf{H}$ an, so dass $\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{1}$ gilt.
   (c) Zeigen Sie, dass $(\mathbf{H}, +, \cdot\,)$ ein *Schiefkörper* ist, d.h. er erfüllt alle Körperaxiome außer dem Kommutativgesetz der Multiplikation. Man nennt ihn den *Schiefkörper der Quaternionen.*

Abgabe: Montag, 24. November 2008, 11 Uhr