Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

WS 2008/09
1.12.2008
Blatt 08

Übungen zu „Lineare Algebra I“

1. Sei $V := \mathrm{Abb}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Zeigen Sie:

   (a) Die Familie $(1, \sin, \cos)$ ist linear unabhängig.

   (b) Die Familie $(1, \sin^2, \cos^2)$ ist linear abhängig.

2. Sei $V := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ und $v_1 := (1, -1, 0)$ sowie $v_2 := (1, 0, -1)$. Zeigen Sie, dass $\langle v_1, v_2 \rangle = V$ ist.

3. Sei I eine Menge $J \subseteq I$ und V ein Vektorraum über einem Körper K. Für eine Familie $\mathfrak{A} = (v_i)_{i \in I}$ in V nennen wir $\mathfrak{B} := (v_j)_{j \in J}$ eine *Teilfamilie von* $\mathfrak{A}$. Beweisen Sie:

   (a) Ist $\mathfrak{A}$ linear unabhängig, so auch $\mathfrak{B}$.

   (b) Ist $\mathfrak{B}$ ein Erzeugendensystem, so auch $\mathfrak{A}$.

4. Sei V ein K–Vektorraum und $\mathfrak{A} = (v_1, \dots, v_n)$ ein n–Tupel in V. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) $\mathfrak{A}$ ist eine Basis;

   (b) $\mathfrak{A}$ ist ein minimales Erzeugendensystem;

   (c) $\mathfrak{A}$ ist ein maximales System linear unabhängiger Vektoren.

Abgabe: Montag, 8. Dezember 2008, 11 Uhr