Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

WS 2008/09
8.12.2008
Blatt 09

Übungen zu „Lineare Algebra I“

1. Sei L ein Körper und K ein Unterkörper.
   (a) Zeigen Sie : Schränkt man die innere Multiplikation von L auf $K \times L$ ein, so ist L ein K–Vektorraum.
   (b) Zeigen Sie :
      (i) $\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = 2$,
      (ii) $\dim_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(\sqrt{2}) = 2$,
      (iii) $\dim_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} = \infty$. (Hinweis: $\mathbf{R}$ ist überabzählbar.)

2. Sei K ein Körper, $V := K^3$ sowie
$$U := \langle (1,1,1), (1,2,3) \rangle, \; U' := \langle (0,1,-1), (0,-2,2) \rangle.$$
Berechnen Sie die Dimensionen der Unterräume $U, U', U \cap U'$ und $U + U'$ von V.

3. Sei $I := [0,1] \subseteq \mathbf{R}$. Betrachten Sie die Abbildung
$$\Phi : \mathbf{R}[X] \to \mathrm{Pol}(I), \quad \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mapsto (\lambda \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i).$$
   (a) Zeigen Sie, dass wenn $\Phi(P) = 0$ ist, dann auch bereits $P = 0$ sein muss. (Hinweis: Benutzen Sie, dass ein Polynom vom Grad n höchstens n Nullstellen haben kann.)
   (b) $\dim_{\mathbf{R}} \mathrm{Pol}(I) = \infty$.

4. Wir definieren $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ als den kleinsten Unterkörper in $\mathbf{R}$ der $\mathbf{Q}$, $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ enthält. Berechnen Sie $\dim_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Abgabe: Montag, 15. Dezember 2008, 11 Uhr