Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

WS 2008/09
15.12.2008
Blatt 10

Übungen zu „Lineare Algebra I“

1. Sei $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ die Drehung um 90 Grad (in positiver Richtung), $\mathcal{K} = (e_1, e_2)$ die kanonische Basis von $\mathbf{R}^2$ und $\mathcal{A} = (v_1, v_2)$ die Basis mit $v_1 = e_1$ und $v_2 = (1, 1)$. Bestimmen Sie die Matrizen $\mathcal{M}(f; \mathcal{K}, \mathcal{K})$, $\mathcal{M}(f; \mathcal{K}, \mathcal{A})$ und $\mathcal{M}(f; \mathcal{A}, \mathcal{A})$.

2. Seien V, W und U Vektorräume sowie $f\colon V \to W$ und $g\colon W \to U$ linear. Zeigen Sie:
   (a) Dann ist auch $g \circ f\colon V \to U$ linear.
   (b) Ist $V \cong W$ und $W \cong U$, so ist auch $V \cong U$.

3. Sei K ein Körper und $K[X, Y]$ der K–Vektorraum der K–Polynome in zwei Unbestimmmten (mit der offensichtlichen Vektorraumstruktur).
   (a) Zeigen Sie, dass die *Monome* $(X^k Y^l)_{k,l \in \mathbf{N}_0}$ eine Basis von $K[X, Y]$ bilden.
   (b) Sei $K[X, Y]^{(n)}$ der Unterraum der Polynome vom Grad kleiner gleich n. Zeigen Sie dass $\mathcal{K}_n = (X^k Y^l)_{k+l \leq n}$ eine Basis von $K[X, Y]^{(n)}$ ist und bestimmen Sie seine Dimension.
   (c) Sei $\triangle : K[X, Y] \to K[X, Y]$ der *Laplace–Operator* gegeben durch
   $$\triangle(P) := D_X D_X(P) + D_Y D_Y(P)$$
   wo D_X bzw, D_Y die (formalen) partiellen Ableitungen nach X bzw. Y sind. Zeigen Sie, dass $\triangle$ linear ist, und dass $\triangle(K[X, Y]^{(n)}) \subseteq K[X, Y]^{(n-2)}$. Bestimmen Sie die Matrix von $\triangle | K[X, Y]^{(3)}\colon K[X, Y]^{(3)} \to K[X, Y]^{(1)}$ bezüglich der Basen $\mathcal{K}_3$ und $\mathcal{K}_1$.

4. (a) Sei K ein endlicher Körper. Zeigen Sie, dass es dann eine Primzahl p und ein $n \in \mathbf{N}$ gibt, so dass K gerade p^n Elemente hat.
   (b) Versuchen Sie eine Körperstruktur auf einer Menge mit 4 Elementen zu finden.

5.* Sei $\ln\colon (0, \infty) \to \mathbf{R}$ der natürliche Logarithmus und $\mathbf{P} \subset \mathbf{N}$ die Menge aller Primzahlen. Zeigen Sie, dass die Familie $(\ln(p))_{p \in \mathbf{P}}$ linear unabhängig über $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{R}$ ist.

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr

Abgabe: Mittwoch, 7. Januar 2009, 11 Uhr