Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

WS 2008/09
7.01.2009
Blatt 11

Übungen zu „Lineare Algebra I“

1. Sei $\mathcal{K} = (e_1, e_2, e_3)$ die kanonische Basis von $\mathbf{R}^3$ und $\mathcal{K}^*$ ihre duale Basis in $(\mathbf{R}^3)^*$. Seien weiter $a, b, c \in \mathbf{R}$ und $\alpha\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ gegeben durch $\alpha(x, y, z) := ax + by + cz$. Welche Koordinaten hat α bezüglich $\mathcal{K}^*$?

2. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ und $f_A\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $x \mapsto Ax$. Bestimmen Sie Kern und Bild von f_A sowie ihre Dimensionen. Geben Sie weiter eine Basis von $\mathbf{R}^3/\ker f_A$ an.

3. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Köper K und $U \subseteq V$ ein Unterraum.
   (a) Zeigen Sie: Ist $\beta\colon U \to K$ linear, so gibt es ein lineares $\alpha\colon V \to K$ mit $\alpha|U = \beta$. (Hinweis: Wählen Sie ein Komplement U' in V mit $V = U \oplus U'$.)
   (b) Man definiert den *Annulator von U* durch
   $$\operatorname{Ann}(U) := \{\alpha \in V^* : \alpha|U = 0\}.$$
   Zeigen Sie, dass $\operatorname{Ann}(U) \subset V^*$ ein Unterraum ist und die Dimension $\dim V - \dim U$ hat. (Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $\Phi\colon V^* \to U^*$, $\Phi(\alpha) = \alpha|U$.)

4. Sei c der Raum der konvergenten, reellen Folgen aus Blatt 7, Aufgabe 3. Zeigen Sie:
   (a) $c_0 := \{x \in c : x \text{ ist Nullfolge}\}$ ist ein Unterraum von c.
   (b) $c/c_0 \cong \mathbf{R}$.

Abgabe: Montag, 12. Januar 2009, 11 Uhr