Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

WS 2008/09
12.01.2009
Blatt 12

Übungen zu „Lineare Algebra I“

1. (a) Berechnen Sie die Produkte AB und BA für

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

   (b) Geben Sie zwei 2×2 Matrizen A und B an, so dass $AB \neq BA$ gilt.

2. Bringen Sie folgenden (reellen) Matrizen A und B (mit Angabe der Elementarmatrizen Ihrer Umformungen) auf Zeilenstufenform und bestimmen Sie ihren Rang:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -7 & 0 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

   (Welchen Rang hat B wenn man dessen Einträge als Elemente eines Körpers mit Primzahlcharakteristik auffasst?)

3. Wir betrachten $\mathbf{R}^n$ und definieren $\varepsilon_1 := 0$, $\varepsilon_k := e_{k-1}$ für $1 < k \leq n$, wo $(e_1, \ldots, e_n)$ die kanonische Basis des $\mathbf{R}^n$ ist. Sei dann A die $n \times n$ Matrix deren k–te Spalte aus dem Vektor ε_k besteht. Zeigen Sie, dass $A^n = 0$ ist. (Hinweis: Betrachten sie die lineare Abbildung $f_A \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, x \mapsto Ax$ und untersuchen Sie, was $(f_A)^n$ auf der kanonischen Basis des $\mathbf{R}^n$ macht.)

4. Seien V und W endlich–dimensionale Vektorräume, $f \colon V \to W$ linear und $f^* \colon W^* \to V^*$ die zu f duale Abbildung. Zeigen Sie:

   (a) $\mathrm{im}(f^*) = \mathrm{Ann}(\ker f)$. (Anleitung für $\mathrm{Ann}(\ker f) \subseteq \mathrm{im}(f^*)$: f induziert einen Isomorphismus $\tilde{f} : V/\ker f \to \mathrm{im} f$ mit $f = \tilde{f} \circ \pi$, wo $\pi \colon V \to V/\ker f$ die kanonische Projektion ist. Sei nun $\alpha \in \mathrm{Ann}(\ker f)$ beliebig. Betrachten Sie analog zu $\tilde{f}$ die von α induzierte Linearform $\tilde{\alpha}$ auf $V/\ker f$. Definieren Sie $\tilde{\beta} := \tilde{\alpha} \circ (\tilde{f})^{-1} \in \mathrm{im}(f)^*$. Benutzen Sie Aufgabe 3 aus Blatt 11 um $\tilde{\beta}$ zu einer Linearform β auf W fortzusetzen. Rechnen Sie nun nach, dass $f^*(\beta) = \alpha$ ist.)

   (b) $\mathrm{rg}(f^*) = \mathrm{rg}(f)$. (Bemerkung: Man beachte, dass dies wegen 4.39 der Vorlesung $\mathrm{rg}_s(A) = \mathrm{rg}_z(A)$ für alle $A \in \mathrm{Mat}(m, n)$ impliziert.)

Abgabe: Montag, 19. Januar 2009, 11 Uhr