Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

WS 2008/09
19.01.2009
Blatt 13

Übungen zu „Lineare Algebra I“

1. Sei K ein Körper, $n \in \mathbf{N}_0$ und V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen (mit den Strukturen aus der Vorlesung) einen Ring bilden:

$$\mathbf{Z}, \quad K[X], \quad \mathrm{Mat}_n(K), \quad \mathrm{End}_K(V).$$

2. Sei $x = (1, 0, -1, 2, 1)$, $y = (0, 1, 1, 0, 1)$, $z = (3, -2, -5, 6, 1)$ sowie $\tilde{x} = (1, 2, 2, 2, 1)$, $\tilde{y} = (4, 0, -3, 8, 2)$ und $\tilde{z} = (2, -4, -7, 4, 0)$ in $\mathbf{Q}^5$. Bestimmen Sie die Dimensionen von $V = \langle x, y, z\rangle$, $\tilde{V} = \langle \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\rangle$ und $V + \tilde{V} \subseteq \mathbf{Q}^5$.

3. (a) Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins. Zeigen Sie, dass $(R^*, \cdot)$ eine Gruppe ist.
   (b) Sei K ein Körper. Bestimmen Sie die Einheitengruppe der folgenden Ringe:

$$\mathbf{Z}, \quad K[X], \quad K \times K \text{ (mit der komponentenweise Multplikation).}$$

4. Sei K ein Körper. Prüfen Sie, ob die folgende Matrix $A \in \mathrm{Mat}_4(K)$ invertierbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls ihr Inverses:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Abgabe: Montag, 26. Januar 2009, 11 Uhr