Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

WS 2008/09
2.02.2009
Blatt 15

Übungen zu „Lineare Algebra I“

Sei K ein Körper.

1. Gegeben seien $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}_4$ durch

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Berechnen Sie $\sigma_1\sigma_2$, $\sigma_2\sigma_1$ sowie $\operatorname{sgn}(\sigma_1), \operatorname{sgn}(\sigma_2), \operatorname{sgn}(\sigma_1\sigma_2)$ und $\operatorname{sgn}(\sigma_2\sigma_1)$.

2. Sei $A \in \operatorname{Mat}(m, n; K)$, $b \in K^m$ und $L = L_{A,b} = \{x \in K^n : Ax = b\}$. Zeigen Sie: Sind $x, y \in L$, $x \neq y$, so ist die ganze Gerade $x + K(y - x) = \{x + t(y - x) : t \in K\} \subseteq L$.

3. Sei $A \in \operatorname{Mat}_2(K)$ gegeben durch $A = (a_{ij})_{i,j=1,2}$. Zeigen Sie:

   (a) A ist genau dann regulär, falls $\det(A) := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ist. (Hinweis: Ist A nicht regulär, dann ist eine der Spalten ein Vielfaches der anderen Spalte.)

   (b) Ist A regulär, so gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

4. Lösen Sie folgendes Gleichungssystem in $\mathbf{F}_7$:

$$\begin{array}{rrrcl} 4x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & & +\, x_3 & = & 4 \\ x_1 & +x_2 & & = & 1 \end{array}$$

Abgabe: Montag, 9. Februar 2009, 11 Uhr