Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

WS 2008/09
9.02.2009
Blatt 16

Übungen zu „Lineare Algebra I“

1. (a) Sei K ein Körper und $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_3(K)$, Zeigen Sie *die Regel von Sarrus*:

$$\begin{aligned}\det(A) = \quad & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.\end{aligned}$$

   (b) Zeigen Sie, dass die Sarrus–Regel für $n = 4$ nicht mehr gilt.

2. Wir nennen $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ (K ein Körper und $n \in \mathbf{N}_0$) eine *obere Dreiecksmatrix*, wenn für alle $1 \leq i, j \leq n$ mit $i > j$ gilt: $a_{ij} = 0$. Zeigen Sie: Ist A eine obere Dreiecksmatrix, so gilt

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

3. Sei K ein Körper, $n \in \mathbf{N}$ und $\sigma \in \mathcal{S}_n$ eine Permutation. Die zugehörige *Permutationsmatrix* $A(\sigma) = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ wird dadurch definiert, dass man $a_{\sigma(j)j} = 1$ und $a_{ij} = 0$ für $i \neq \sigma(j)$ setzt ($j = 1, \ldots, n$). Zeigen Sie:

$$\det(A(\sigma)) = \mathrm{sgn}(\sigma).$$

4. Berechnen Sie die Determinante folgender Matrix $A \in \mathrm{Mat}_4(\mathbf{Q})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Besprechung in der ersten Vorlesungswoche im SS 2009.