Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

WS 2008/09
14.02.2009

Klausur zu „Lineare Algebra I“

Klausur–Nummer:

Name, Vorname:

Geburtsdatum:

Matrikel–Nummer:

1. (a) Seien $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ und $g\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ gegeben durch
$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 0), \quad g(y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2).$$
Zeigen Sie, dass f injektiv und g surjektiv ist.
   (b) Zeigen Sie: Sind $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ und $g\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ beliebige Abbildungen mit $g \circ f = \mathrm{id}$, so muss f injektiv und g surjektiv sein.

2. (a) Sei K ein Körper, $n \in \mathbf{N}$ und $E_n \in \mathrm{Mat}_n(K)$ die Einheitsmatrix. Es sei weiter $\lambda \in K$ und $A := \lambda E_n$. Zeigen Sie, dass für alle $B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ gilt:
$$AB = BA.$$
   (b) Gegeben sei $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbf{Q})$ mit folgender Eigenschaft: Für alle $B \in \mathrm{Mat}_2(\mathbf{Q})$ gilt $AB = BA$. Zeigen Sie : Es gibt ein $\lambda \in \mathbf{Q}$, so dass $A = \lambda E_2$ ist.

3. (a) Prüfen Sie ob folgendes Tupel $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$ von Vektoren im $\mathbf{R}^3$ linear abhängig ist:
$$v_1 = (-1, 2, 1), \quad v_2 = (1, 0, 1), \quad v_3 = (-10, 6, -4)$$
   (b) Sei nun $V := \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subseteq \mathbf{R}^3$. Bestimmen Sie eine Basis von V und begründen Sie.

4. (a) Lösen Sie folgendes lineare Gleichungssystem über $\mathbf{Q}$:
$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 5x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \end{array}$$
   (b) Zeigen Sie: Ist $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbf{Q})$ vom Rang 3, so hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für jedes $b \in \mathbf{Q}^3$ eine Lösung und die Lösung ist eindeutig.

Bearbeitungszeit: 90 Minuten.