Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

WS 2008/09
17.04.2009

Nachklausur zu „Lineare Algebra I“

Klausur–Nummer:

Name, Vorname:

Geburtsdatum:

Matrikel–Nummer:

1. (a) Sei $n \in \mathbf{N}$ und $V := \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n : z_1 + \cdots + z_n = 0\}$. Zeigen Sie, dass V ein Untervektorraum von $\mathbf{C}^n$ ist.
   (b) Sei $M := \mathbf{C}^2 \setminus \{(z, 0) \in \mathbf{C}^2 : z \neq 0\} \subseteq \mathbf{C}^2$. Zeigen Sie, dass M kein Untervektorraum von $\mathbf{C}^2$ ist.

2. Sei $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(x, y) = (y, x)$ sowie $\mathcal{K} = (e_1, e_2)$ die kanonische Basis des $\mathbf{R}^2$ und $\mathcal{A}$ die Basis $(e_2, -e_1)$.
   (a) Bestimmen Sie die Matrizen $A = M(f, \mathcal{K}, \mathcal{K})$ und $B = M(f, \mathcal{A}, \mathcal{A})$.
   (b) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $T := M(\mathrm{id}, \mathcal{A}, \mathcal{K})$ und $S := M(\mathrm{id}, \mathcal{K}, \mathcal{A})$ und prüfen Sie, ob $B = SAT$ ist.

3. Sei $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ gegeben durch
$$f(x, y, z) = (x + y - z, z - x - y).$$
   (a) Berechnen Sie die Dimension von $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathbf{R}^2$ und geben Sie eine Basis von $\mathrm{im}(f)$ an.
   (b) Berechnen Sie die Dimension von $\ker(f) \subseteq \mathbf{R}^3$ und geben Sie eine Basis von $\ker(f)$ an.

4. (a) Zeigen Sie, dass folgende Matrix $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbf{Q})$ invertierbar ist und bestimmen Sie ihr Inverses,
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$
   (b) Seien $n, r \in \mathbf{N}$ und K ein Körper. Zeigen Sie: Ist $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ invertierbar, so ist auch A^r invertierbar und es gilt: $(A^r)^{-1} = (A^{-1})^r$.

Bearbeitungszeit: 90 Minuten.