Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

WS 2008/09
23.12.2008
Weihnachtsblatt

Weihnachtsblatt zu der Vorlesung „Lineare Algebra I“

1. Wir definieren folgende Relation auf $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$: für $z, w \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ sei $z \sim w$, falls es ein $\lambda \in \mathbf{R}^*$ gibt, sodass $z = \lambda \cdot w$. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzelation ist. Der Quotient $\mathbf{RP}^n := \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$ heisst der *reelle n–dimensionalen projektiven Raum*. (Analog erhält man den *komplex projektive Raum*, falls man $\mathbf{R}$ durch $\mathbf{C}$ ersetzt).

2. Für $z \in \mathbf{C}$ mit $z = x + iy$ für $x, y \in \mathbf{R}$ definieren wir $\bar{z} := x - iy$ und $|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}}$. Zeigen Sie:
   (a) $\bar{\bar{z}} = z$;
   (b) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$;
   (c) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.

3. Zeigen Sie, dass $\mathbf{S}^1 := \{z \in \mathbf{C}^* : |z| = 1\}$ eine Untergruppe von $(\mathbf{C}^*, \cdot\,)$ ist.

4. Zeigen Sie, dass die Gruppen $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ und $\mathbf{S}^1$ isomorph sind. (Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $\varphi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{S}^1$, $\theta \mapsto \cos(2\pi\theta) + i \cdot \sin(2\pi\theta)$. Benutzen Sie, dass die Abbildung surjektiv ist. Zeigen Sie, dass φ –unter Verwendung der Additionstheoreme– ein Gruppenhomomorphismus ist und wenden Sie schließlich den Homomorphiesatz für abelsche Gruppen an.)

5. Sei $(G, \cdot\,)$ eine Gruppe. Wir definieren für positive $n \in \mathbf{Z}$, $g^n := g \cdot \ldots \cdot g$ (n–mal), für negatives n sei $g^n := (g^{-1})^{-n}$ und schließlich sei $g^0 = 1$. Weiter setzen wir für $g \in G$
$$\operatorname{ord}(g) := \min\{n \in \mathbf{N} : g^n = 1\}.$$
und nennen diese Zahlen die *Ordnung von g*. Falls es kein solches n gibt, so ist g von *unendlicher Ordnung*, in Zeichen $\operatorname{ord}(g) = \infty$, und sonst sagen wir g sei von *endlicher Ordnung*.
   (a) Zeigen Sie : $g^{n+m} = g^n g^m$ für $m, n \in \mathbf{Z}$ beliebig.
   (b) Wir definieren $\langle g \rangle := \{g^n : n \in \mathbf{Z}\}$. Zeigen Sie, dass dies eine Untergruppe von G ist.
   (c) Zeigen Sie : ist G eine endliche Gruppe, so hat jedes Element $g \in G$ endliche Ordnung und $\operatorname{ord}(g)$ teilt $\#G$. (Hinweis: Satz von Lagrange)

6. Betrachten Sie die Abbildung $\Phi\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{H}$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 \cdot \mathbf{i} + x_2 \cdot \mathbf{j} + x_3 \cdot \mathbf{k}$, wo $\mathbf{H}$ der quaternionische Körper ist.
   (a) Zeigen Sie, dass Φ injektiv ist.

(b) Φ ist bijektiv aufs Bild. Wir setzen für $x, y \in \mathbf{R}^3$ das *Kreuzprodukt von x und y*

$$x \times y := \Phi^{-1}\left(\frac{1}{2}(\Phi(x)\Phi(y) - \Phi(y)\Phi(x))\right).$$

Begründen Sie, warum das Kreuzprodukt wohldefiniert ist und berechnen Sie die Komponenten des Vektors $x \times y$. Warum ist $\mathbf{R}^3$ mit dieser Verknüpfung als Multi–plikation kein Körper?

7. Seien $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$.

   (a) Zeigen Sie, dass $C[a,b] := \{f\colon [a,b] \to \mathbf{R} : f \text{ ist stetig}\}$ ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}([a,b], \mathbf{R})$ ist.

   (b) Für welches $c \in \mathbf{R}$ ist $U := \{f \in C[a,b] : f(a) = c\}$ ein Untervektorraum?

8. Sei $V := \mathrm{Abb}((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \mathbf{R})$, wo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ das offene Intervall mit den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ in $\mathbf{R}$ ist. Zeigen Sie, dass die Familie $(1, \tan, \sin)$ linear unabhängig ist.

9. Sei $U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 : x_1 + x_2 = 0 \text{ und } x_3 + x_4 = 0\}$. Zeigen Sie, dass U ein Unterraum des $\mathbf{R}^4$ ist und berechnen Sie seine Dimension.

10. Sei $y \in \mathbf{R}^3$ fest. Weiter sei $f_y : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ gegeben durch das Kreuzprodukt aus Aufgabe 5, $f_y(x) := x \times y$.

    (a) Zeigen Sie, dass f_y linear ist.

    (b) Sei $\mathcal{K}_3$ die kanonische Basis des $\mathbf{R}^3$. Berechnen Sie $\mathcal{M}(f_y; \mathcal{K}_3, \mathcal{K}_3)$.

11. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Für einen Endomorphismus $f\colon V \to V$ definieren wir den *Eigenraum von f zum Eigenwert λ* durch $\mathrm{Eig}_\lambda(f) := \{v \in V : f(v) = \lambda \cdot v\}$ für ein $\lambda \in K$.

    (a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Eig}_\lambda(f)$ ein Unterraum von V ist;

    (b) Sei V von endlicher Dimension und es gelte für $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$

    $$V = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Eig}_{\lambda_i}(f).$$

    Zeigen Sie, dass es eine Basis $\mathcal{A}$ von V gibt, sodass $\mathcal{M}(f; \mathcal{A}, \mathcal{A})$ diagonalform hat und die Werte in der Diagonale gerade durch die λ_i, $i = 1, \ldots, m$ gegeben sind.

12. Sei V ein Vektorraum über K und $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Ferner sei ein Vektor $v \in V$ gegeben, sodass für eine natürliche Zahl $n \in \mathbf{N}$ gilt

    $$f^n(v) \neq 0, \quad f^{n+1}(v) = 0.$$

    Zeigen Sie, dass dann die Familie $(v, f(v), f^2(v), \ldots, f^n(v))$ linear unabhängig ist. Folgern Sie daraus, dass wenn $\dim V = n + 1$ gilt, diese Familie eine Basis von V ist.

Abgabe: keine.