Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 08/09

Mathematik I
für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 3 (Abgabe am 29.10.2008)

Bitte geben Sie bei Ihren Lösungen stets einen vollständigen Rechenweg und eine verständliche Begründung an. Bitte schreiben Sie in ganzen Sätzen. Abgabe **vor** der Vorlesung.

Aufgabe 10 (10 Punkte)
Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Durch welche geometrischen Operationen erhält man aus dem Graphen von f die Graphen der folgenden Funktionen?

a) $f_a(x) = f(x-1)$ b) $f_b(x) = f(x+1)$
c) $f_c(x) = f(x+3)$ d) $f_d(x) = 2f(x)$
e) $f_e(x) = f(2x)$ f) $f_f(x) = f(x/2)$
g) $f_g(x) = 2f(x/2)$ h) $f_h(x) = f(-x)$
i) $f_i(x) = -f(x)$ j) $f_j(x) = -f(-x)$.

Hinweis: Wenn Sie sich nicht sicher sind, dann probieren Sie es mal für verschiedene einfache Funktionen aus, wie z.B. $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ oder $x \mapsto x^3$.

Aufgabe 11 (10 Punkte)
Ein Elch kann sich aussuchen, welche Menge x (gemessen in Gewicht) er pro Tag an Landpflanzen frisst und welche Menge y an Wasserpflanzen. Eine Gewichtseinheit Wasserpflanzen liefert 0,4 Energieeinheiten und 0,1 Einheiten Natrium, eine Gewichtseinheit Landpflanzen 0,5 Energieeinheiten und kein Natrium. Allerdings ist seine Wahl durch folgende drei Nebenbedingungen eingeschränkt: Um überleben zu können, muss er mindestens 2 Energieeinheiten pro Tag aufnehmen und mindestens 0,1 Einheiten Natrium. Andererseits hat der Magen nur ein begrenztes Fassungsvermögen von 40 Volumeneinheiten; eine Gewichtseinheit Landpflanzen hat ein Volumen von 5 Einheiten, während eine Gewichtseinheit Wasserpflanzen ein Volumen von 10 Einheiten hat. Formulieren Sie diese 3 Nebenbedingungen als Ungleichungen, die x und y enthalten. Zeichnen Sie in der xy-Ebene die 3 Nebenbedingungen ein sowie die Region, in der alle drei Bedingungen erfüllt sind! Bestimmen Sie außerdem den Punkt in dieser Region, bei dem die Energieaufnahme maximal ist!

Aufgabe 12 (10 Punkte)
Ein einfaches Modell für die Form eines Bakteriums ist ein abgerundeter Zylinder, d.h. die Form bestehend aus einem Zylinder (Länge $= 2\,\mu$m, Radius $= 0,5\,\mu$m) und einer aufgesetzten Halbkugel (Radius $= 0,5\,\mu$m) an jedem Ende. Wie lang ist das Bakterium? Berechnen Sie sein Volumen!

Aufgabe 13 (10 Punkte)

In der Vorlesung haben wir die Bergmannsche Regel diskutiert, der zugrundeliegt, dass man bei gleicher Form das Verhältnis von Oberfläche zu Volumen verkleinern kann, indem man das Objekt (Säugetier, Vogel) vergrößert. Eine andere Möglichkeit, dieses Verhältnis zu ändern, besteht darin, bei gleichbleibendem Volumen, die Form zu verändern. Betrachten Sie dazu exemplarisch Quader gleichen Volumens, deren Kantenlängen a, b, c die folgenden Verhältnisse $a : b : c$ haben.

a) $1 : 1 : 1$ (Würfel) b) $1 : 1 : 2$

c) $1 : 1 : 5$ d) $1 : 1 : 10$

e) $1 : 1 : 20$ f) $1 : 1 : 50$

Hinweis: Legen Sie z.B. das Volumen willkürlich auf 1 fest, und berechnen Sie jeweils die Oberfläche.

Welche Form würde sich für Tiere in wärmeren, welche für Tiere in kälteren Gefilden anbieten?

Aufgabe 14 (10 Punkte)

Für den funktionalen Zusammenhang $y = f(x)$ zwischen zwei Größen x und y machen Modell A und Modell B verschiedene Vorhersagen, f_A und f_B, auf der Grundlage von zwei Hypothesen H_A und H_B. Um zwischen H_A und H_B zu entscheiden, führen Sie ein Experiment durch und gewinnen folgende Messwerte für x und y:

x	1.3	1.7	2.0	2.2	2.5
y	0.2518	0.3096	0.3854	0.4083	0.4608
$f_A(x)$	0.2530	0.2917	0.3877	0.4169	0.4625
$f_B(x)$	0.2725	0.3143	0.3806	0.4122	0.4590

Wie Sie sehen, liegt manchmal $f_A(x)$ näher am wahren Wert y und manchmal $f_B(x)$. Um zu beurteilen, welches Modell insgesamt näher an der Wahrheit liegt, betrachten wir die folgenden Punkte im $\mathbb{R}^5$: $u = \big(y_1, \ldots y_5\big)$, $v_A = \big(f_A(x_1), \ldots, f_A(x_5)\big)$, und $v_B = \big(f_B(x_1), \ldots, f_B(x_5)\big)$, wobei x_i und y_i die Messwerte in der aufgelisteten Reihenfolge sein sollen. Bestimmen Sie die Abstände $d(v_A, u)$ und $d(v_B, u)$ im $\mathbb{R}^5$, die wir als Maß für die Abweichung der Vorhersage von der Wirklichkeit verwenden. Welche Vorhersage ist demnach die genauere?

A, α	Alpha	I, ι	Iota	P, ρ (ϱ)	Rho	**Griechisches Alphabet**
B, β	Beta	K, κ	Kappa	Σ, σ (ς)	Sigma	
Γ, γ	Gamma	Λ, λ	Lambda	T, τ	Tau	
Δ, δ	Delta	M, μ	My (Mu)	Υ, υ	Ypsilon (Upsilon)	(In Klammern:
E, ϵ (ε)	Epsilon	N, ν	Ny (Nu)	Φ, ϕ (φ)	Phi	Schreibvarianten
Z, ζ	Zeta	Ξ, ξ	Xi	X, χ	Chi	bzw. englische
H, η	Eta	O, o	Omikron	Ψ, ψ	Psi	Namen)
Θ, θ (ϑ)	Theta	Π, π	Pi	Ω, ω	Omega	