

Mathematik I

für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 5 (Abgabe am 12.11.2008)

Aufgabe 20

(10 Punkte)

Bei einer Tierpopulation verhalte sich die Geburtenrate g (Anzahl Geburten pro Jahr pro Populationsgröße) in Abhängigkeit von der Populationsdichte d (Anzahl Individuen pro Quadratkilometer) gemäß $g = 0,6 + 0,25d$, die Sterberate s gemäß $s = 0,4 + 0,3d$. Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch: Für welche d schrumpft die Population, für welche wächst sie, für welche bleibt sie konstant?

Aufgabe 21

(10 Punkte)

Beweisen Sie aus den Potenzrechenregeln die folgenden Rechenregeln für den natürlichen Logarithmus für alle $x, y > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$$

$$\log(1/x) = -\log(x)$$

$$\log(1) = 0$$

$$\log(x^\alpha) = \alpha \log(x)$$

wenn $x < y$, dann $\log(x) < \log(y)$.

Aufgabe 22

(10 Punkte)

Zwischen den Größen x und y bestehe der Zusammenhang $y = cx^\alpha$ mit Konstanten $c, \alpha > 0$. Bestimmen Sie c und α aus den 2 Datenpaaren $x_1 = 1,1$, $y_1 = 1,54$ und $x_2 = 2,9$, $y_2 = 1,96$.

Aufgabe 23

(10 Punkte)

a) Plotten Sie die Funktionen $f(x) = x^\alpha$ für $\alpha = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{4}{3}, 2, 4$ in dasselbe Diagramm mit $x \in [0, 1.2]$.

Beispiel 5: Für einen Datenvektor \mathbf{x} zeichnet

» `plot(x, sin(x))`

» `hold on`

» `plot(x, cos(x))`

» `hold off`

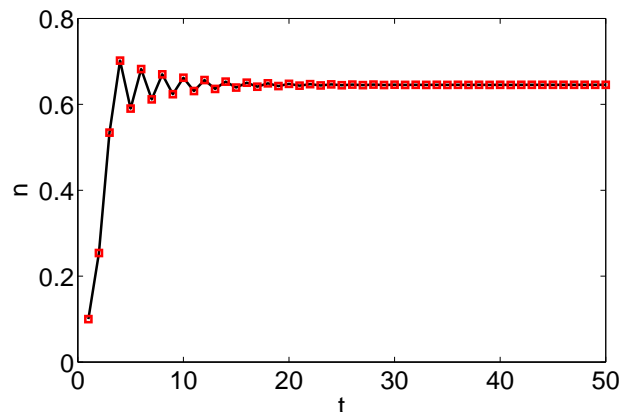
$\sin x$ und $\cos x$ in dasselbe Diagramm.

Aufgabe 24 (Populationsmodell nach Verhulst / Logistische Gleichung) (10 Punkte)
 In Aufgabe 20 haben wir ein Populationsmodell betrachtet, in dem nur bis zu einer kritischen Populationsgröße Wachstum auftrat. Darüber schrumpfte die Population im nächsten Schritt wieder. So kann man z.B. den Einfluss eines beschränkten Nahrungsangebots modellieren. Die Rekursionsgleichung für die Populationsgröße n_t (angegeben als Bruchteil der maximal möglichen Population, d.h. $0 \leq n_t \leq 1$) zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{Z}$ ist von der Form

$$n_{t+1} = r(1 - n_t)n_t, \quad r \in [0, 4]$$

(in geeigneten Einheiten). Berechnen Sie mit Matlab die ersten 1000 Folgenglieder² für vorher definierte Variablen $n_1 \in [0, 1]$ und $r \in [0, 4]$. Illustrieren Sie jeweils durch einen Plot die folgenden Aussagen (d.h., plotten Sie jeweils die ersten Folgenglieder³ n_t gegen t für einen Wert r aus dem jeweiligen Intervall und einen Anfangswert n_1 , z.B. $n_1 = 0,1$):

- Für $0 \leq r \leq 1$ stirbt die Population stets monoton aus.
- Für $1 < r \leq 2$ strebt n_t monoton gegen einen Gleichgewichtswert. (Lesen Sie den ungefähren Wert für Ihr Beispiel ab!)
- Für $2 < r \leq 2\sqrt{2}$ strebt n_t oszillierend gegen einen Gleichgewichtswert. (Lesen Sie den ungefähren Wert für Ihr Beispiel ab!)
- Für $3 < r < 1 + \sqrt{6}$ pendelt die Populationsgröße zwischen zwei verschiedenen Werten. (Lesen Sie die ungefähren Werte für Ihr Beispiel ab!)
- Für die meisten r -Werte mit $3,57 < r \leq 4$ verhält sich die Folge chaotisch, d.h. scheinbar zufällig.



Beispiel 6: Lösung für 24c

```

» r=2.82;
» n=zeros(1,1000);
» n(1)=0.1;
» for t=2:1000
n(t) = r * (1-n(t-1)) * n(t-1);
end
» plot(n(1:50), '-sk', 'LineWidth', 2, 'MarkerEdgeColor', 'r')
» xlabel('t')
» ylabel('n')

```

²Denken Sie an Aufgabe 19 und Beispiel 3.

³Wählen Sie die Anzahl an Folgengliedern, die Sie plotten so, dass die Aussage gut erkennbar ist – je nach Parameterwerten sind das vielleicht 10, 30, 100 oder 1000...