

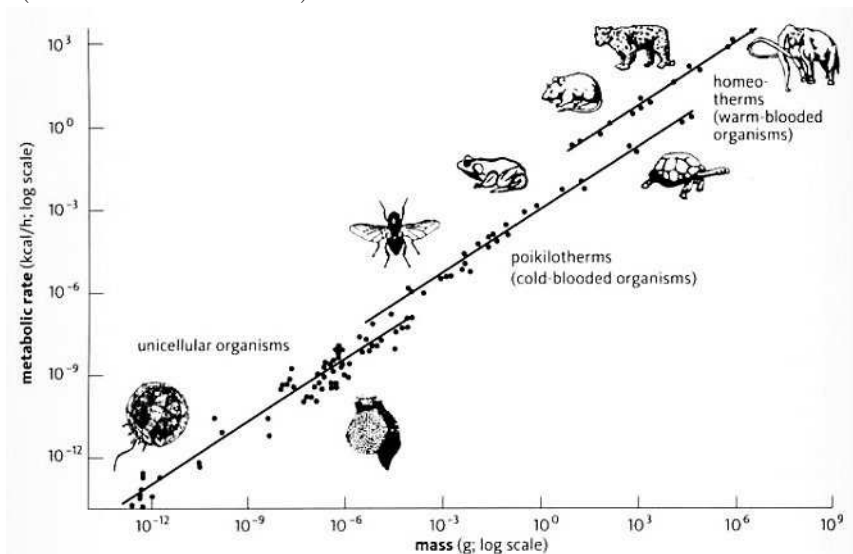
Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 6 (Abgabe am 19.11.2008)

Aufgabe 25 (Radiokarbon-Methode der Altersbestimmung) (10 Punkte)

Das radioaktive Kohlenstoff-Isotop C^{14} hat eine Halbwertszeit von 5568 Jahren ("Libby-Halbwertszeit"). Da C^{14} durch einen Prozess, bei dem kosmische Strahlung auf atmosphärischen Stickstoff einwirkt, ständig produziert wird, ist der Anteil von C^{14} an allem Kohlenstoff in der Atmosphäre und damit auch in allen Lebewesen konstant und entspricht 15,3 Zerfällen pro Minute pro Gramm Kohlenstoff. Beim Tod endet die Zufuhr von C^{14} , es zerfällt jetzt nur noch. Daher wird totes Gewebe mit 7,65 Zerfällen pro Minute pro Gramm Kohlenstoff auf ein Alter von 5568 Jahren geschätzt. Bestimmen Sie nach dieser Methode das Alter einer Probe aus 5,2 Gramm Gewebe, die zu 74% aus Kohlenstoff besteht und in der 21,8 Zerfälle pro Minute gemessen werden.

Aufgabe 26 (Kleibersches Gesetz) (10 Punkte)



Im doppelt-logarithmischen Diagramm oben stellt eine Gerade den (idealisierten) Zusammenhang zwischen x (der Masse) und y (der Stoffwechselrate) für verschiedene Gruppen von Organismen dar. Bestimmen Sie für

- Warmblüter (*Homoiotherme*),
- Kaltblüter (*Poikilotherme*) und
- Einzeller

jeweils eine Formel der Form $y = f(x)$, für die Funktion f , deren Graph diese Gerade ist. Geben Sie dabei kurz an, welche Zahlen(-paare) Sie aus dem Diagramm abgelesen haben, und wie Sie daraus die Parameter in Ihren Funktionen $f(x)$ bestimmt haben.

Aufgabe 27

(10 Punkte)

Fertigen Sie mit MATLAB doppelt-logarithmische Plots⁴ der Funktionen $f(x) = x^\alpha$ an für $\alpha = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{4}{3}, 2, 4$ und $x \in [\frac{1}{2}, 2]$. Zeichnen Sie dabei alle Funktionen in das gleiche Diagramm.

Aufgabe 28

(10 Punkte)

Wir simulieren $N = 1000$ radioaktive Atome und nehmen an, dass jedes Atom mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 3,7\% = 0,037$ innerhalb einer Sekunde zerfällt. Für diese Simulation erzeugen wir eine Zufallszahl⁵ $X \in [0, 1]$. Gilt $X \leq 0,037$, so soll das simulierte Atom zerfallen, sonst nicht. Das Verfahren wiederholen wir in einer Funktion⁶ `decay` so oft, bis das Atom zerfallen ist, und generieren so die zufällige Anzahl Sekunden t bis zum Zerfall. Führen Sie dies für $N = 1000$ Atome durch und plotten Sie in ein Histogramm, wie viele Atome wann zerfallen sind.

```
N=1000;
Atome=zeros(1,N);
for n=1:N
    Atome(n)=decay();
end
hist(Atome,max(Atome)); % Lesen Sie sich die Hilfe zu hist durch,
                        % und spielen Sie etwas damit...
```

Plotten Sie zum Vergleich die (zufalls-unabhängige) Anzahl der zu erwartenden Zerfälle im Zeitintervall $[t, t + 1]$

$$Z(t) = Z(0) \exp(-\lambda t)$$

mit $Z(0) = pN$ (warum?); bestimmen Sie dazu zunächst λ aus

$$\exp(-\lambda \cdot 1 \text{ sec}) = 1 - p \quad (\text{warum?}).$$

BEMERKUNG: $Z(t)$ beschreibt den Zerfallsprozess umso besser, je größer N ist. Probieren Sie doch auch mal $N = 100$ und $N = 10\,000$.

⁴Beispiel 7: (Doppelt-logarithmischer Plot)

```
> x = .5:.01:3;
> y = sqrt(x);
> loglog(x,y); %erstellt einen doppelt-logarithmischen Plot
```

⁵Beispiel 8: (Erzeugung von Zufallszahlen)

Der Befehl `A=rand(N)` erzeugt eine $N \times N$ -Matrix `A` (ein Zahlenschema aus N Zeilen und N Spalten) mit Zufallswerten $A_{ij} \in [0, 1]$. Für unsere Zwecke genügt es, jeweils *eine* Zufallszahl X zu berechnen, also

```
> X=rand(1)
```

⁶Legen Sie eine Datei mit dem Namen `decay.m` mit dem folgenden Inhalt an (vgl. Beispiel 4).

```
function zeit=decay()
    zeit=1;
    X=rand(1);
    while(X>0.037) % while(...) durchläuft die folgenden Anweisungen
        zeit=zeit+1; % solange die Bedingung in der Klammer erfüllt ist.
        X=rand(1);
    end
end
```

Probieren Sie ein paar Mal im Command Window aus, was passiert, wenn man `decay()` eingibt.