Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 08/09

Mathematik I
für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 7 (Abgabe am 26.11.2008)

Aufgabe 29 (Fehlerrechnung zur Radiokarbon-Methode) (10 Punkte)

a) Bei einer Probe von 4,4 Gramm Kohlenstoff messen Sie 43 ± 4 Zerfälle pro Minute. Um festzustellen, wie sich die Mess-Ungenauigkeit auf die Ungenauigkeit des Altersschätzers auswirkt, bestimmen Sie, wie in Aufgabe 25, einmal den Altersschätzer $A(39)$ für 39 Zerfälle pro Minute und einmal den Altersschätzer $A(47)$ für 47 Zerfälle pro Minute. Beweisen Sie, dass für jede Zerfallsrate Z zwischen 39 und 47 der Altersschätzer $A(Z)$ zwischen $A(39)$ und $A(47)$ liegt.

b) Nehmen Sie nun an, dass Sie auch die Masse m der Probe nicht exakt bestimmen konnten, sondern nur als $4{,}4 \pm 0,2$ Gramm. Wie lautet nun, bei zwei Fehlerquellen, das Intervall, in dem die Altersschätzer $A(Z, m)$ liegen können (mit Erklärung)?

Aufgabe 30 (10 Punkte)

a) Beim *goldenen Schnitt* teilt man eine Strecke so in zwei Teilstrecken, dass das Verhältnis des kleineren Teils zum größeren gleich dem Verhältnis des größeren Teils zur Gesamtstrecke ist. Berechnen Sie dieses Verhältnis (ungerundet!).

b) Ein Schiff rage 28 m aus dem Wasser. Sie stehen auf einem Stein am Ufer des Meeres, so dass sich Ihre Augen in 2,20 m Höhe befinden. Am Horizont erkennen Sie die obere Hälfte des Schiffes. Wie weit ist das Schiff von Ihnen entfernt?

Aufgabe 31 (10 Punkte)

a) Da das menschliche Auge aus einzelnen Sehzellen besteht, sieht man tatsächlich alles "gepixelt" mit einer maximalen Auflösung (Pixelgröße) von einer halben Bogenminute. Mit welcher Auflösung ($n \times m$ Pixel) sehen Sie eine Tafel, die 3 m hoch und 5 m breit ist, wenn Sie mittig vor ihr im Abstand von 10 m sitzen?

b) Zeigen Sie, dass es zu jedem $c \geq 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ solche Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gibt, dass

$$c \sin(x + \varphi) = \alpha \sin x + \beta \cos x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

indem Sie geeignete α und β explizit angeben.

c) Zeigen Sie mithilfe der Additionstheoreme für Sinus und Kosinus, dass

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x \qquad \text{und damit} \qquad \sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\,.$$

Aufgabe 32 (10 Punkte)

a) In einem Experiment werden folgende 4 Himmelsrichtungen (als Winkel φ gegen den Uhrzeigersinn, beginnend im Osten) gemessen: $32°, 46°, 48°, 104°$. Bestimmen Sie die zugehörigen Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_4 \in \mathbb{R}^2$ (erste Achse nach Osten, zweite nach Norden), deren arithmetisches Mittel $\overline{\vec{e}}$, den Einheitsvektor $\vec{e}_{\text{mittel}}$ in Richtung von $\overline{\vec{e}}$, und dessen Winkel φ_{mittel}. Vergleichen Sie mit dem arithmetischen Mittel $\overline{\varphi}$ der Winkel.

b) Ein Vogel fliegt zunächst für zwei Stunden mit 20 km/h über Grund nach Westen und danach für drei Stunden mit 15 km/h über Grund nach Südosten. Wieviel Kilometer westlich und wieviel Kilometer südlich von seinem Startpunkt befindet er sich dann? Beantworten Sie diese Frage mithilfe der Vektorrechnung.

Aufgabe 33 (Richtungsmittelung mit MATLAB) (10 Punkte)

Mit dem Befehl `phi=2*pi*rand(1,1);` erzeugen wir eine zufällige Zahl zwischen 0 und 2π, die wir als den Winkel ϕ bezeichnen möchten. Durch `ex=cos(phi); ey=sin(phi);` definieren wir einen Einheitsvektor $\vec{e}$ in Richtung dieses Winkels, mit Komponenten `ex`$= \cos\phi$ und `ey`$= \sin\phi$. Der Befehl `plot(ex,ey,'ks')` zeichnet ein Kästchen an der "Spitze" dieses Vektors (d.h. einen Punkt auf dem Einheitskreis).

Erzeugen Sie 100 solche zufälligen Vektoren der Länge 1 und plotten Sie sie, wie oben, in *ein* Diagramm. Zeichnen Sie zur Orientierung den Einheitskreis in dasselbe Diagramm. Bestimmen Sie nun das arithmetische Mittel `phi_m` der 100 Winkel und zeichnen Sie in dieser Richtung eine Linie vom Ursprung zum Rand das Einheitskreises, z.B. mit `plot([0,cos(phi_m)],[0,sin(phi_m)],'k')`. Berechnen Sie zum Vergleich den Mittelwert der hundert Einheitsvektoren und plotten Sie sowohl, wie oben, einen Punkt an der Spitze dieses gemittelten Vektors, als auch eine Linie vom Ursprung durch diesen Punkt bis zum Rand des Einheitskreises (bis hier alles in *ein* Diagramm).

Wenn Sie (am Bildschirm) mehrere solche Diagramme erzeugen, was können Sie über die Lage der beiden "Richtungslinien" sagen? Drucken Sie das Diagramm für *einen* charakteristischen Fall aus.