

Mathematik I

für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 8 (Abgabe am 03.12.2008)

Aufgabe 34

(10 Punkte)

Beim Rechnen mit Matrizen gelten etwas andere Regeln als beim Rechnen mit Zahlen.

a) Zeigen Sie für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{dass}$$

- (i) $A^2 = 0$ (obwohl $A \neq 0$),
 - (ii) $B^2 = -I$ (obwohl die Gleichung $x^2 = -1$ für $x \in \mathbb{R}$ keine Lösung hat), und
 - (iii) $AB \neq BA$.
- b) Begründen Sie, warum die Regeln $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ und $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ im allgemeinen nicht gelten, wenn a und b statt Zahlen $n \times n$ -Matrizen sind.

Aufgabe 35

(10 Punkte)

Berechnen Sie – falls möglich – für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- a) AA^T ,
- b) $A^T A$,
- c) $AA^T B$,
- d) $A^T AB$,
- e) $B^T A^T A$,
- f) A^2 ,
- g) $AA^T AA^T$.

Aufgabe 36

(10 Punkte)

Berechnen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) A^{2n+1} für $n \in \mathbb{N}_0$ (d.h. alle ungeraden Potenzen $A^1 = A, A^3, A^5, \dots$)
- b) A^{2n} für $n \in \mathbb{N}_0$ (d.h. alle gerade Potenzen $A^0 = I, A^2, A^4, \dots$)
- c) $8A^9 + 7A^8 - 6A^7 - 5A^6 + 4A^5 + 3A^4$

Aufgabe 37

(10 Punkte)

Berechnen Sie – nun mithilfe von Matlab – für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix},$$

- a) $2A$, b) $A + B$, c) $2A - 3B$, d) $(2A)^T - (3B)^T$,
e) AB , f) BA , g) $A^T B^T$, h) $(BA)^T$.

Beispiel 9: (Rechnen mit Matrizen)

» $A = [1 \ 2; \ 3 \ 4]$ definiert in Matlab die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

» $B = [0 \ 1; \ 1 \ 0]$... die Matrix $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

» $3*A$ berechnet das 3-fache der Matrix A

» $A+B$ berechnet die Summe $A + B$ und

» $A-B$ die Differenz der Matrizen A und B .

Summe und Differenz sind definiert, wenn A und B beide dieselbe Form ($n \times m$) haben.

» $A*B$ berechnet das Matrix-Produkt AB (möglich, falls die Anzahl der Spalten von A gleich der Anzahl der Zeilen von B ist).

» $A.*B$ berechnet das komponentenweise Produkt der Matrizen A und B .

Merke: Die mathematische Schreibweise AB muß in Matlab-Notation mit $A*B$ übersetzt werden und nicht mit $A.*B$.

» A' oder

» `transpose(A)` liefert die transponierte Matrix A^T . (Zeilen und Spalten von A werden vertauscht.)

Hinweis: $B*A'$ ist das Produkt von B und A^T und nicht $(BA)^T$.

» A^3 liefert die dritte Potenz A^3 der Matrix A , d.h. das dreifache Matrix-Produkt $A^3 = AAA$ der Matrix A mit sich selbst.

» $A.^3$ dagegen liefert eine Matrix, die als Einträge die Einträge von A , komponentenweise zur 3. Potenz erhoben, hat. Diese Operation haben wir schon oft zum Manipulieren von Datenvektoren (d.h. von $1 \times n$ - bzw. $n \times 1$ -Matrizen) verwendet. Jetzt wissen Sie, warum hier der Punkt notwendig war (bzw. was Matlab ohne Punkt macht oder zu machen versucht). Vergleichen Sie zur Illustration nochmals B^2 und $B.^2$ miteinander. Beachten Sie auch, dass mit der mathematischen Schreibweise A^n immer das n -fache Matrixprodukt A^n gemeint ist und nie die komponentenweise Potenz $A.^n$.

» $A(2,1)$ liefert den Eintrag der in der zweiten Zeile und in der ersten Spalte von A steht. Sie können auch einzelne Einträge verändern: Schreiben Sie

» $A(1,2) = 5$ und betrachten Sie die veränderte Matrix A .