Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 08/09

Mathematik I
für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 10 (Abgabe am 17.12.2008)

Aufgabe 41 (10 Punkte)

a) In Aufgabe 19 haben Sie die ersten Fibonacci-Zahlen F_t berechnet. Plotten Sie nun mit MATLAB die Verhältnisse $v_t := F_{t+1}/F_t$ für $t = 1, \ldots, 1000$.

b) In Teil a) haben wir mithilfe von MATLAB beobachtet, dass das Verhältnis F_n/F_{n-1} zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen offensichtlich einem Grenzwert zustrebt. Wir nehmen nun an, dass dieser Grenzwert existiert und nennen ihn α, d.h.

$$\alpha := \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} .$$

Bestimmen Sie α wie folgt:
- Dividieren Sie die Rekursionsvorschrift $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ durch F_{n-1}.
- Bilden Sie den Limes $n \to \infty$, um eine Gleichung für α zu erhalten.
- Lösen Sie diese (quadratische) Gleichung für α.
- Welche der beiden Lösungen ist die richtige und warum?

c) Zeichnen Sie mit MATLAB in das Diagramm aus Teil a) nun zum Vergleich die waagerechte Gerade $y = \alpha$ ein.

Aufgabe 42 (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktionenfolge $f_n(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeichen Sie (mit MATLAB oder von Hand) die Graphen von f_1, f_2, f_4 und f_8 für $x \in [-1.1, 1.1]$.

b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -1 < x < 1 \\ 1 & \text{für} \qquad x = 1 \end{cases} .$$

Bestimmen Sie damit für $|x| \leq 1$ die Grenzfunktion $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

c) Für welche x ist $f(x)$ stetig?

Aufgabe 43 (10 Punkte)

Bestimmen Sie mit Hilfe der Sätze aus der Vorlesung die Grenzwerte der Zahlenfolgen

$$a_n = \frac{n}{2n+1}, \quad b_n = \frac{n^2}{n-n^2}, \quad c_n = \frac{n}{n^2+1} \quad \text{und} \quad d_n = \sin\left(\frac{1+n\pi}{n}\right).$$

Aufgabe 44 (10 Punkte)

Der antike Philosoph Zenon von Elea (490–430 v. Chr.) glaubte die Widersprüchlichkeit der Zeit so beweisen zu können: Achilles (bekannt für seine Schnelligkeit) tritt ein Wettrennen gegen eine Schildkröte an. Die Schildkröte läuft hundertmal langsamer als Achilles, erhält allerdings 10 Meter Vorsprung. Hat Achilles die ersten 10 Meter überwunden, so ist die Schildkröte bereits 10 cm weiter. Hat Achilles auch diese 10 cm zurückgelegt, so ist die Schildkröte doch schon 1 mm weiter und so fort. So kann Achilles die Schildkröte nie einholen.

Womit Zenon nicht rechnete ist, dass eine unendliche Reihe konvergent sein (und damit einen endlichen Wert haben) kann. Bestimmen Sie die Position x_0 der Rennbahn, an der Achilles die Schildkröte überholt, auf zweierlei Weise, einmal mit Hilfe der geometrischen Reihe, und ein zweites Mal, indem Sie Gleichungen für die Position $x_A(t)$ des Achilles und die Position $x_S(t)$ der Schildkröte als Funktion der Zeit aufstellen und den Schnittpunkt aus der Gleichung $x_A(t) = x_S(t)$ ermitteln.

Aufgabe 45 (10 Punkte)

Wir fragen uns, ob die unendlichen Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konvergieren oder divergieren. Plotten Sie dazu mit MATLAB – als graphischen Anhaltspunkt – in je ein Diagramm die Werte der Partialsummen

$$q_N := \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}\,, \qquad r_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \qquad \text{und} \qquad s_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$$

in logarithmischen Skalenteilen, nämlich, indem Sie $N = 10^k$ setzen und q_N, r_N bzw. s_N als Funktion von k für $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ plotten. Welche der Reihen halten Sie für konvergent, welche für divergent? Konvergiert eine der Reihen möglicherweise gegen $\frac{\pi^2}{6}$, $\sqrt{2}$ oder e? Wenn ja, welche?

HINWEIS: Vielleicht helfen Ihnen die Funktion `qN.m`,

```
function [q]=qN(N)
  q=zeros(1,length(N));
  for i=1:length(N)
    n=0:N(i);
    q(i)=sum(1./factorial(n)); % factorial(n) = n!
end
```

und der Befehl

```
>> plot(k,qN(10.^k),'s')
```

mit geeignetem `k`.