Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 08/09

Mathematik I
für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 12 (Abgabe am 14.01.2009)

Aufgabe 50 (10 Punkte)

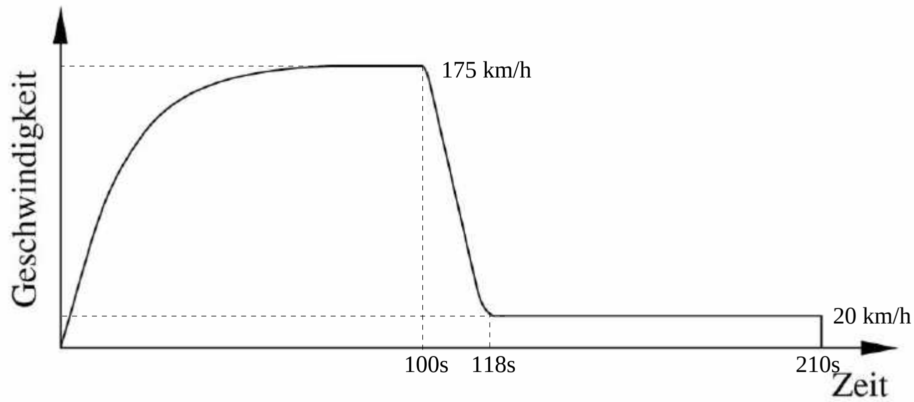
Bestimmen Sie

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}\,, \quad \int_1^2 \frac{1+x}{x^2}\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_{-1}^1 (x-1)^2\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_0^\pi \cos\left(\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_1^{\mathrm{e}} \log x\,\mathrm{d}x\,.$$

Hinweis: Wenn Sie eine Stammfunktion nicht erraten können, schlagen Sie unter "unbestimmte Integrale" in einem Tafelwerk, z.B. Bronstein & Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, oder im World Wide Web, z.B. unter `http://integrals.wolfram.com/`, nach und überzeugen sich durch Ableiten von der Richtigkeit.

Aufgabe 51 (10 Punkte)

In der Vorlesung haben wir uns überlegt, dass der untenstehende Graph den Geschwindigkeits-Zeit-Verlauf bei einem Fallschirmsprung beschreibt. Welche Größe wird durch die Fläche zwischen dem Graph und der Zeitachse beschrieben? Zeichnen Sie ein, wie der Graph verläuft, wenn sich der Fallschirm nicht öffnet. Zu welchem Zeitpunkt erreicht der Fallschirmspringer in diesem Fall den Boden?



Aufgabe 52 (10 Punkte)

In welchem Winkel φ zur Horizontalen sollte man einen Ball werfen, damit er möglichst weit fliegt? Wir beantworten diese Frage unter Vernachlässigung von Luftreibung und Wind. Die Flugbahn des Balls ist eine Wurfparabel in einer vertikalen Ebene des $\mathbb{R}^3$, die wir mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren. Der Ball startet im Ursprung mit Geschwindigkeit $\vec{v} = (v\cos\varphi, v\sin\varphi)$, wobei $v = \|\vec{v}\|$ durch Ihre Muskelkräfte vorgegeben ist. Er durchläuft dann die Parabelbahn $\vec{x}(\varphi, t) = \vec{v}t - \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix}0\\g\end{smallmatrix}\right)t^2$, $g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, bis er wieder auf der Ausgangshöhe $x_2 = 0$ eintrifft, und zwar mit der x_1-Koordinate $w(\varphi)$, der Wurfweite. (Wir sehen davon ab, dass der Abwurfpunkt 1 bis 2 m über dem Erdboden liegen kann.) Bestimmen Sie die Funktion w auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ und ermitteln Sie ihr Maximum.

Aufgabe 53 (Numerische Integration) (10 Punkte)

Wir berechnen mit MATLAB die Riemannschen Ober- und Untersummen für die Funktion $f(x) = x^2$ im Intervall $[0,1]$. Wir unterteilen dieses Intervall in N gleich große Teilintervalle. Da die Funktion f monoton wächst, nimmt sie immer am linken Rand eines Teilintervalls den kleinsten und am rechten Rand den größten Wert im Teilintervall an. Daher lauten die Ober- und Untersumme:

$$S_O(N) = \sum_{i=1}^{N} f(x_{i,\max})\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{N} f\left(\frac{i}{N}\right)\frac{1}{N}\,,$$

$$S_U(N) = \sum_{i=1}^{N} f(x_{i,\min})\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{N} f\left(\frac{i-1}{N}\right)\frac{1}{N}\,.$$

Legen Sie eine Datei `so.m` mit dem folgenden Inhalt an.

```
function [obersumme] = so(N)
obersumme=zeros(1,length(N));
for i=1:length(N)
    j=1:N(i);
    obersumme(i)=sum((j./N(i)).^2*1./N(i));
end
end
```

Mit dem Befehl `so(100)` können Sie nun den Wert von $S_O(100)$ berechnen. Schreiben Sie analog eine Funktion `su`, die als Eingabe den Wert N erhält und $S_U(N)$ zurückgibt. Plotten Sie die Werte von $S_O(N)$ und $S_U(N)$ für $N = 10$, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5 und lesen Sie im Diagramm den Grenzwert

$$\lim_{N\to\infty} S_O(N) = \lim_{N\to\infty} S_U(N) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

ab. Überprüfen Sie, dass Sie dasselbe Ergebnis durch Rechnung aus dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung erhalten, indem Sie benutzen, dass $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ eine Stammfunktion von f ist.

Berechnen Sie nun analog Riemannsche Ober- und Untersummen für die Funktion $f(x) = (2\pi)^{-1/2}\exp(-x^2/2)$ in Intervall $[0,2]$, fertigen Sie wieder einen entsprechenden Plot an und lesen Sie daraus den Wert des Integrals

$$\int_0^2 \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x$$

ab.