

# Mathematik I

## für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 13 (Abgabe am 21.01.2009)

---

### Aufgabe 54

(10 Punkte)

a) Bestimmen Sie  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ .

HINWEIS: In Aufgabe 48 haben Sie ausgerechnet, dass  $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$ .

b) Berechnen Sie  $\int_0^1 \frac{1-x^{1/4}}{\sqrt{x}} dx$ .

c) Welches  $a \in \mathbb{R}$  erfüllt  $\int_0^\infty a e^{-7x} dx = 1$ ?

d) Bestimmen Sie  $((1+bx)e^{-bx})'$  für festes  $b \in \mathbb{R}$  (wie immer mit Rechenweg).

e) Berechnen Sie  $\int_0^\infty 7x e^{-7x} dx$ .

### Aufgabe 55

(10 Punkte)

Berechnen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Funktion

$$U(x, y, z) = \sqrt{1+x^2+y^2} - xe^{2y} + \log(1+z).$$

Bestimmen Sie außerdem die Richtungsableitung von  $U$  im Ursprung in Richtung von  $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , d.h.  $\frac{\partial U}{\partial \vec{e}}(\vec{0})$ .

### Aufgabe 56

(10 Punkte)

Die Matrix  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  ist positiv definit,  $A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  ist negativ definit und  $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  ist indefinit (d.h.  $\vec{x}^T A_3 \vec{x}$  kann sowohl positive als auch negative Werte annehmen).

Zur Illustration plotten wir mit MATLAB die Funktionen

$$f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\vec{x} \mapsto f_i(\vec{x}) = \vec{x}^T A_i \vec{x}$$

- » `x = -1:.01:1;`
- » `y = -1:.01:1;` Erzeugt die üblichen Datenvektoren `x` und `y`, hier mit 201 Elementen.
- » `[X,Y] = meshgrid(x,y);`  
Erzeugt zwei  $201 \times 201$ -Matrizen `X` und `Y`, in deren Zeilen jeweils der Vektor `x` bzw. `y` steht. `X` und `Y` dienen lediglich als Punktegitter, wichtig für uns sind die Vektoren `x` und `y`.
- » `f1 = X.^2+2*Y.^2;` Erzeugt eine  $201 \times 201$ -Matrix `f1` mit Einträgen  $f1_{ij} = x_i^2 + 2y_j^2$ .
- » `f2 = -3*X.^2-Y.^2;`
- » `f3 = X.^2-Y.^2;`
- » `mesh(X,Y,f1);` Erzeugt einen 3D-Plot der Funktion  $f_1(x, y) = x^2 + 2y^2$ .
- » `mesh(X,Y,f2);`
- » `mesh(X,Y,f3);`

HINWEIS: Wenn Sie im Plot-Fenster den Icon  anklicken, können Sie anschließend durch Klicken in den Plot und Bewegen der Maus Ihren Blickwinkel verändern.

Geben Sie jeweils an, ob die Funktionen  $f_i$  bei  $\vec{x} = \vec{0}$  ein Maximum, ein Minimum oder einen Sattel besitzen.

Entscheiden Sie nun, indem Sie – wie oben – entsprechende 3D-Plots anfertigen, ob die folgenden Matrizen positiv definit, negativ definit oder indefinit sind,

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$