Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 08/09

Mathematik I
für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 15 (Abgabe am 4.2.2009)

Aufgabe 60 (10 Punkte)

Sei $N(t)$ die Anzahl der Individuen einer Fischpopulation zur Zeit t (in Jahren). Seien die (pro Kopf-) Geburtenrate $g > 0$ und die Sterberate $s > 0$ Konstanten. Dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}N}{dt} = gN - sN\,.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung lautet $N(t) = e^{(g-s)t}N(0)$ (exponentielles Wachstum), mit beliebigem $N(0)$. Die Größe $g - s$ heißt auch *Wachstumsrate*. (Vergleichen Sie auch mit Aufgabe 20.)

Der Mensch entnehme nun im Zeitintervall $[t, t+\mathrm{d}t]$ die Menge $a\big(1+\cos(2\pi t)\big)N(t)$, $a > 0$, z.B. durch je nach Jahreszeit unterschiedlich intensives Fischen (wobei der Ertrag immer proportional zur Populationsgröße ist). Die Population erfüllt nun also die DGL

$$\dot{N} = gN - sN - a\big(1 + \cos(2\pi t)\big)N\,. \qquad (*)$$

a) Zeigen Sie, dass
$$N(t) = b\mathrm{e}^{wt - v\sin(2\pi t)} \qquad (+)$$
die DGL löst, wenn man nur w und v geeignet wählt, d.h. geben Sie w und v als Funktion von g, s und a an, so dass $(+)$ eine Lösung von $(*)$ ist.

b) Welche Werte darf dabei b annehmen? Welche anschauliche Bedeutung hat b?

c) Welche Beziehung muss zwischen g, s und a erfüllt sein, damit die Population um einen Mittelwert oszilliert aber langfristig weder wächst noch schrumpft?

d) Wie groß wird die Population dann maximal und minimal (als Funktion von b, g, s und a) und zu welchen Zeiten? Vergleichen Sie diese Zeiten mit den Zeiten größter und kleinster Fischerei-Intensität (Skizze).

Aufgabe 61 (Populationsmodell von Lotka und Volterra) (10 Zusatzpunkte)
Wir simulieren die Entwicklung zweier Tier-Populationen N (Beute) und P (Räuber) als Funktion der Zeit t. $N(t), P(t)$ sind die Anzahlen der jeweiligen Individuen (in Millionen) zum Zeitpunkt t. Lotka und Volterra schlugen unabhängig voneinander folgende gekoppelten Differentialgleichungen als Modell der zeitlichen Entwicklung vor:

$$\frac{dN}{dt} = N(a - bP)\,, \quad \frac{dP}{dt} = P(cN - d)\,. \tag{A}$$

Dabei sind a, b, c, d positive Konstanten. Das Modell (A) beruht auf folgenden Annahmen: Pro Beutetier und Zeiteinheit ist die Anzahl der Geburten minus natürliche Todesfälle durch a gegeben, während die Anzahl bP der Todesfälle durch Gefressenwerden proportional ist zur Anzahl der Raubtiere P. Pro Raubtier und Zeiteinheit vermehren sich die Raubtiere um $cN - d$; dieser Betrag wächst mit der verfügbaren Nahrung und würde in Abwesenheit jeglicher Beute $-d$ betragen.

Stellen Sie N und P als Funktion der Zeit ($t \in [0, 50]$) in einem Diagramm graphisch dar mit $a = 0.5, b = 0.2, c = 0.3, d = 0.6$ für die drei verschiedenen Anfangswerte $(N(0), P(0)) = (1, 0.4)$, $(3, 0.6)$ und $(3, 2.5)$. Gehen Sie dazu wie im untenstehenden Beispiel vor. Dabei verwenden wir einen speziellen Matlab-Befehl zur numerischen Lösung von Differenzialgleichungen, einen sogenannten *Integrator* oder *Solver*.

Plotten Sie außerdem für jeden der 3 genannten Anfangswerte die so errechneten Wertepaare $(N(t), P(t))$ in ein weiteres Diagramm, das die *Bahn* des Verlaufs in der NP-Ebene (dem sogenannten *Zustands-* oder *Phasenraum*) zeigt. (Im untenstehenden Beispiel würde der entsprechende Befehl `plot(y(:,1),y(:,2))` lauten.)

Beispiel 11: Zu lösen seien die gekoppelten Differenzialgleichungen (gedämpftes Pendel)

$$\frac{dy_1}{dt} = -\beta y_1 + y_2\,, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\omega^2 y_1\,, \tag{B}$$

mit bestimmten Koeffizienten β und ω, $y_1(0) = 1$ und $y_2(0) = .5$. Wir schreiben nun eine Funktion `pendel.m`, die diese Differentialgleichung enthält:

```
function[dy]=pendel(t,y)
dy=zeros(2,1);
omega=2;
beta=0.1;
dy(1)=y(2)-beta*y(1);
dy(2)=-omega^2*y(1);
end
```

Anschließend geben wir folgende Befehle direkt ein:

```
» t=0:.1:50;
» y0=[1; .5];
» [t,y]=ode45('pendel',t,y0);
» plot(t,y);
```

`ode45('pendel',t,y0)` berechnet die Lösungen y_i von (B) numerisch. Die Ausgabe erfolgt in Form einer Matrix `y`, deren i-te Spalte die Funktionswerte von $y_i(t)$ im Intervall $[0, 50]$ enthält.