Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 08/09

Mathematik I
für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Klausur am 11.2.2008

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 80 Punkte erreichbar, 60 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 30 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 90 Minuten. **Viel Erfolg!**

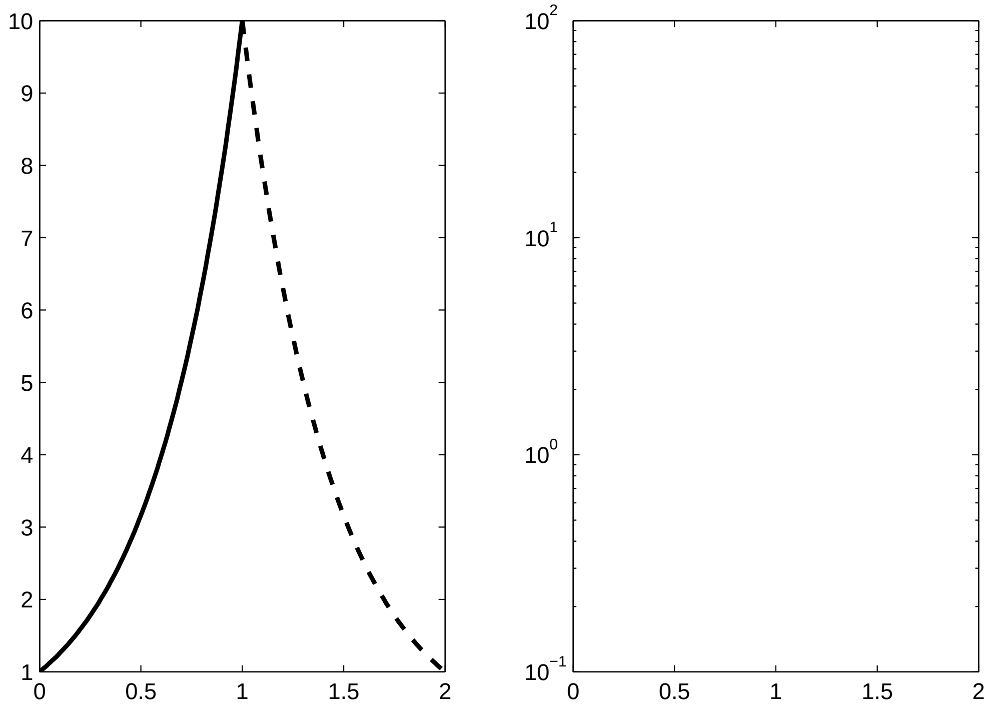
Aufgabe 1 (2+4+4=10 Punkte)

Die durchgezogene Linie im linken Diagramm ist der Graph der Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$.

a) Welchen Wert hat der Parameter a?

b) Übertragen Sie das rechte (logarithmische) Diagramm auf Ihr Bearbeitungsblatt. Tragen Sie dann dort sowohl das Äquivalent der durchgezogenen als auch das der gestrichelten Linie ein.

c) Geben Sie die Funktion an, deren Graph die gestrichelte Linie ist (im ursprünglichen Diagramm).



Aufgabe 2 (1+3+4+4=12 Punkte)

Wenn sich etwa 10^8 *E. coli*-Bakterien in der Niere eines Menschen befinden, können Sie eine Nierenbeckenentzündung auslösen. Zur Zeit $t = 0$ seien 50 000 *E. coli*-Bakterien in eine Niere gelangt. Hier vermehren sie sich so schnell, dass sich ihre Anzahl alle 20 Minuten verdoppelt (Absterbe- oder Ausscheidungsprozesse seinen bereits eingeschlossen). Sei t die Zeit (in Stunden gemessen) und $N(t)$ die Anzahl der Bakterien zur Zeit t.

a) Geben Sie den Wert von $N(0)$ an.

b) Welchen Wert hat $\dfrac{N(t+1)}{N(t)}$, d.h. um welchen Faktor wächst die Anzahl innerhalb einer Stunde?

c) Wie lautet die Funktion $N(t)$?

d) Wie lange dauert es bis die kritische Anzahl (10^8) erreicht ist?

Hinweis: Denken Sie an exponentielles Wachstum!

Aufgabe 3 (6+2=8 Punkte)

Die logistische Gleichung, $n_{t+1} = r(1 - n_t)n_t$, beschreibt die Entwicklung einer Populationsgröße n_t als Funktion der Zeit $t \in \mathbb{N}$. Dabei ist $r \in (0, 4]$ ein Parameter.

a) Was ist der größte Wert, den n_{t+1} annehmen kann?
Hinweis: Sie müssen dazu das Maximum der Funktion $f(n) = r(1-n)n$ für positive n bestimmen.

b) Sei $r = 2$. Für welche Werte von n_t wächst die Population im nächsten Schritt (d.h. für welche n_t gilt $\dfrac{n_{t+1}}{n_t} > 1$)?

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Notieren Sie zu den Buchstaben (a)–(e) jeweils ein **W** für "wahr" oder ein **F** für "falsch" (ohne Begründung). Für jede richtige Antwort erhalten Sie **zwei** Punkte, für jede falsche werden **zwei** Punkte abgezogen. Sollte sich so eine negative Punktzahl ergeben, so wird die Aufgabe mit Null Punkten gewertet.

Die Gerade $y = x$ ist die Regressionsgerade (wobei wir, wie üblich y als Funktion von x betrachten) zu den drei Punkten...

a) $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$.
b) $(0, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$.
c) $(-1, -1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$.
d) $(-1, -1)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$.
e) $(1, 0)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$.

Aufgabe 5 (3+3+3+6=15 Punkte)

Sei

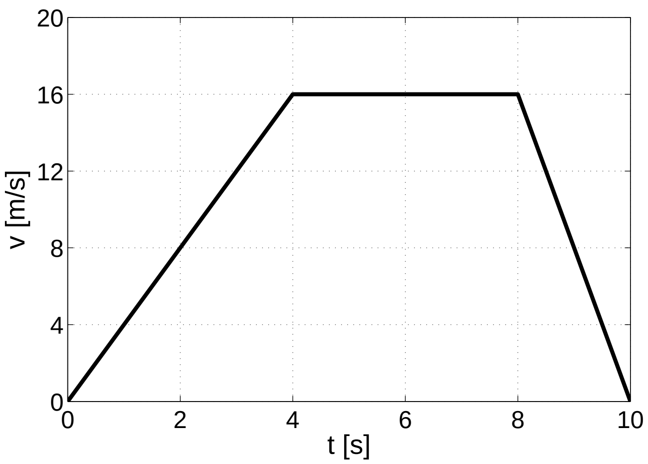
$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

die Leslie-Matrix für ein Populationsmodell mit drei Populationsstadien, d.h. zur Zeit t wird die Population durch den Vektor $\vec{x}^{(t)} = (x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, x_3^{(t)})^T$ beschrieben und es gilt $\vec{x}^{(t+1)} = L\vec{x}^{(t)}$ für $t \in \mathbb{N}_0$. Zur Zeit $t = 1$ sei der Populationsvektor $(7500, 4000, 2500)^T$.

a) Welchen Wert hatte der Populationsvektor zur Zeit $t = 0$, d.h. bestimmen Sie $\vec{x}^{(0)}$.
b) Berechnen Sie L^2.
c) Welchen Wert hat der Populationsvektor zur Zeit $t = 3$, d.h. bestimmen Sie $\vec{x}^{(3)}$.
d) Nach langer Zeit stellt sich ein Gleichgewicht ein.
   (i) Bestimmen Sie alle möglichen Gleichgewichtspopulationen, d.h. alle Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, die $L\vec{x} = \vec{x}$ erfüllen.
   (ii) In unserem speziellen Fall befinden sich im zweiten Stadium der Gleichgewichtskonfiguration 5000 Individuen. Wie lautet der zugehörige Gleichgewichtsvektor?

Aufgabe 6 (3+3+3=9 Punkte)

Im nebenstehenden Diagramm ist die Geschwindigkeit v eines Autos als Funktion der Zeit t dargestellt. Zur Zeit $t = 8\,\mathrm{s}$ leitet der Fahrer eine Vollbremsung ein und kommt zur Zeit $t = 10\,\mathrm{s}$ unmittelbar vor einer Mauer zum Stillstand.



a) Zeichnen Sie ein Diagramm der Beschleunigung $a = \dot{v}$ als Funktion der Zeit.
b) Wie lang ist der Bremsweg, d.h. welche Strecke wird zwischen den Zeiten $t = 8\,\mathrm{s}$ und $t = 10\,\mathrm{s}$ zurückgelegt?
c) Angenommen die Bremsen versagen, zu welchem Zeitpunkt t_K fährt das Auto (bei ungebremster gerader Weiterfahrt) gegen die Mauer?

Aufgabe 7 (2+2+4+4+4=16 Punkte)

Ein paarungsbereites Nachtfalterweibchen, das im Ursprung eines Koordinatensystems in der Ebene wartet, verströmt einen Duftstoff, der anziehend auf paarungsbereite Nachtfaltermännchen wirkt. Die Konzentration dieses Duftstoffes am Ort mit kartesischen Koordinaten (x, y) betrage (in geeigneten Einheiten)

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\,.$$

Ein Nachtfaltermännchen befinde sich im Punkt $(-2, 1)$.

a) Wie hoch ist die Konzentration des Duftstoffes, der das Männchen an diesem Ort ausgesetzt ist?

b) Wie weit ist das Männchen vom Weibchen entfernt?

c) Skizzieren Sie das Gebiet, in dem die Konzentration des Duftstoffes mindestens $\frac{1}{5}$ beträgt.

d) Angenommen, das Männchen beginnt, "nach rechts" zu fliegen, d.h. es bewegt sich bei konstantem y-Wert in Richtung wachsender x-Werte. Wie stark ändert sich dann die Konzentration des Duftstoffes in dem Moment, in dem das Männchen losfliegt?
HINWEIS: Denken Sie an partielle Ableitungen.

e) Wenn das Männchen stattdessen in Richtung $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ losfliegt, wie ändert sich dann die Konzentration des Duftstoffes in dem Moment, in dem es startet?
HINWEIS: Denken Sie an Richtungsableitungen.