

Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Nachklausur am 15.4.2009

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 58 Punkte erreichbar, 50 Punkte $\hat{=}$ 100% ($\hat{=}$ Note 1,0), 50% $\hat{=}$ 25 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\hat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).

Bearbeitungszeit: 90 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

(10 Punkte)

Auf vielfachen Wunsch beginnt die Klausur mit einigen allgemeinen Multiple-Choice-Aufgaben, diesmal vom Wettbewerb *Känguru der Mathematik*.

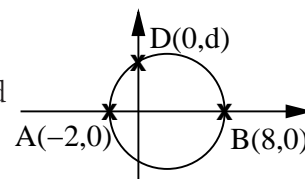
Beantworten Sie die Fragen durch Angabe der passenden Kombination von Klein- und Großbuchstaben.

Für jedes richtige Paar erhalten Sie 2 Punkte, für jedes falsche Paar werden 2 Punkte abgezogen. Sollte sich auf diese Weise eine negative Gesamt-Punktzahl für die Aufgabe ergeben, so wird sie mit Null Punkten gewertet.

a) Wenn $x + y = 0$ und $x \neq 0$, dann ist $\frac{x^{2009}}{y^{2009}} =$
(A) -2^{2009} (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2^{2009}

b) Der maximale Wert, den $f(x) = |5 \sin x - 3|$ für $x \in \mathbb{R}$ annehmen kann, ist
(A) 2 (B) 3 (C) π (D) 5π (E) 8

c) Die Zeichnung zeigt einen Kreis mit dem Durchmesser \overline{AB} und dem Punkt D auf der Kreislinie. Dann ist $d =$
(A) 3 (B) $2\sqrt{3}$ (C) 4 (D) 5 (E) 6



d) Angenommen, es gilt $x^2yz^3 = 7^3$ und außerdem $xy^2 = 7^9$. Dann ist $xyz =$
(A) 7^{10} (B) 7^9 (C) 7^8 (D) 7^6 (E) 7^4

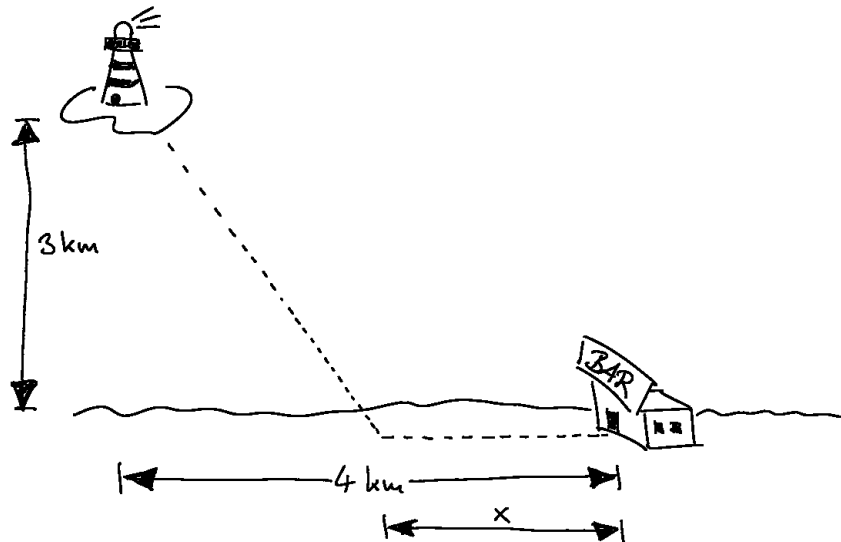
e) Zähler und Nenner eines Bruchs b seien beides negative Zahlen, der Zähler ist um 1 größer als der Nenner. Welche der folgenden Aussagen ist dann richtig?
(A) $b < -1$ (B) $-1 < b < 0$ (C) $0 < b < 1$ (D) $b > 1$
(E) b kann sowohl positiv als auch negativ sein

Aufgabe 2

(2+8 Punkte)

Ein Leuchtturm liegt 3km vor der Küste. Rudert der Leuchtturmwärter auf geradem Weg zur Küste und geht danach 4km an der Küste entlang, so kommt er zu einer Bar (siehe Skizze).

Mit seinem Ruderboot bewegt sich der Leuchtturmwärter mit einer Geschwindigkeit von 3km/h fort, an Land läuft er mit 5km/h.



- Wie lange braucht der Leuchtturmwärter bis zur Bar, wenn er auf geradlinigem Weg dorthin rudert?
- In welcher Entfernung x zur Bar sollte der Leuchtturmwärter an Land gehen, um die Bar in möglichst kurzer Zeit zu erreichen. Wie lange braucht er in diesem Fall bis zur Bar?

Aufgabe 3

(6 Punkte)

Die Differenzialgleichung des Fadenpendels lautet (für kleine Auslenkungen)

$$l\ddot{\varphi}(t) = -g\varphi(t), \quad l, g > 0.$$

Wie muss man $\omega > 0$ wählen, damit $\varphi(t) = c \sin(\omega t)$, $c \in \mathbb{R}$, eine Lösung dieser Differenzialgleichung ist?

HINWEIS: Berechnen Sie also $\ddot{\varphi}$, setzen Sie ein, und drücken Sie ω durch l und g aus.

Für welches c gilt $\varphi(\frac{\pi}{2\omega}) = \frac{\pi}{50}$?

Aufgabe 4

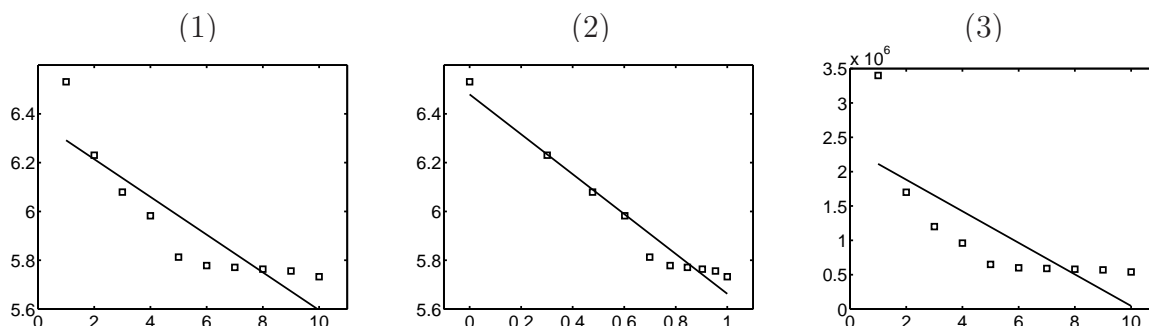
(6+2+6 Punkte)

In der folgenden Tabelle sind die Einwohnerzahlen E (in Millionen) der zehn größten Städte Deutschlands⁸ angegeben. Dabei sind die Städte in absteigender Größe nummeriert.

Kfz-Kennzeichen	B	HH	M	K	F	E	DO	S	D	HB
Nummer n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Einwohnerzahl $E / 10^6$	3,4	1,7	1,2	0,96	0,65	0,60	0,59	0,58	0,57	0,54

Mithilfe des folgenden MATLAB-Codes haben Sie die Einwohnerzahl mit unterschiedlichen Achsenskalierungen gegen die Nummer n geplottet und jeweils eine Regressionsgerade eingezeichnet.

```
>> n=1:10;  
>> E=10^6*[3.4 1.7 1.2 0.96 0.65 0.60 0.59 0.58 0.57 0.54];  
>> plot(n,E,'sk') % Plotbefehl A  
>> plot(n,log10(E),'sk') % Plotbefehl B  
>> plot(log10(n),log10(E),'sk') % Plotbefehl C
```



- Ordnen Sie den Plotbefehlen A–C die Plots 1–3 zu, indem Sie jeweils die passenden Paare aus Buchstabe und Zahl notieren. Für jede richtige Zuordnung erhalten Sie 2 Punkte für jede falsche Zuordnung werden 2 Punkte abgezogen.
- Was für einen Zusammenhang zwischen E und n vermuten Sie? (z.B. linear, Potenzgesetz, exponentiell, ...)
- In Plot (2) lesen Sie auf der Regressionsgeraden näherungsweise die Wertepaare

$$(n, E) = (10^0, 10^{6,5}) \quad \text{und} \quad (10^{0,6}, 10^6)$$

ab. Bestimmen Sie daraus eine Näherung für die Funktion $E(n)$, welche die Gerade in Plot (2) beschreibt.

⁸Stand 31.12.2000, Quelle de.wikipedia.org, gerundet auf zwei gültige Stellen.

Aufgabe 5

(6 Punkte)

Ein Vater, sein Sohn und seine Tochter sind zusammen 100 Jahre alt. Der Vater ist doppelt so alt wie sein Sohn, und 30 Jahre älter als seine Tochter.

Bezeichnen Sie das Alter von Vater, Sohn und Tochter mit x_1 , x_2 und x_3 . Stellen sie ein LGS auf, das die oben formulierten Bedingungen wiedergibt. Bestimmen Sie das Alter der drei Personen.

Aufgabe 6

(2+2+8 Punkte)

- Ein Mischwald bestehe im Jahr t aus L_t Laubbäumen und N_t Nadelbäumen.
- Jährlich sterben $5\% = \frac{1}{20}$ der Laubbäume und $15\% = \frac{3}{20}$ der Nadelbäume ab.
- An den frei werdenden Plätzen wächst in $10\% = \frac{1}{10}$ der Fälle ein Laubbaum nach, in $90\% = \frac{9}{10}$ der Fälle ein Nadelbaum.

Demnach ergibt sich das folgende Populationsmodell:

$$\begin{pmatrix} L_{t+1} \\ N_{t+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{19}{20} + \frac{1}{10} \frac{1}{20} & \frac{1}{10} \frac{3}{20} \\ x & \frac{17}{20} + \frac{9}{10} \frac{3}{20} \end{pmatrix}}_{:= W} \begin{pmatrix} L_t \\ N_t \end{pmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad W = \frac{1}{200} \begin{pmatrix} 191 & 3 \\ 200x & 197 \end{pmatrix}$$

- Welchen Wert hat x , d.h. an welchem Anteil der Plätze, an denen im Jahr t ein Laubbaum stand, steht im Jahr $t + 1$ ein Nadelbaum?
- Es sei $L_1 = N_1 = 2000$. Berechnen Sie L_2 und N_2 .
- Durch entsprechende Bewirtschaftung stellen Sie sicher, dass an allen frei werdenden Plätzen nur noch Nadelbäume nachwachsen.
 - Geben Sie die entsprechend modifizierte Matrix \tilde{W} für diesen Fall an.
 - Geben Sie L_t als Funktion von L_0 an.
HINWEIS: Es kommen jetzt keine neuen Laubbäume mehr nach.
 - Wieviele Jahre dauert es, bis der Laubbaumbestand auf die Hälfte des Ausgangswerts gesunken ist?