Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Funktionen & Etwas Geometrie

Stefan Keppeler

22. Oktober 2008

- Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
  z.B. $f_1 : x \mapsto x$ oder $f_2 : x \mapsto 1 - x^2$
  (kurz: $f_1(x) = x$ bzw. $f_2(x) = 1 - x^2$)
- Graph der Funktion $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = f(x)\}$
  ist Figur in der Ebene
- allgemein: $f : D \to W$ wobei
  D: Definitionsbereich
  W: Wertebereich
  oben: $D = W = \mathbb{R}$ andere Beispiele:
  - Temperatur $T(x, y, z)$ (in °C) an jedem Punkt (x, y, z) des Raumes, d.h. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
  - oder, der Raum ist nur endlich groß (sagen wir quaderförmig), $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 < x < a,\ 0 < y < b,\ 0 < z < c\}$,
    dann wäre $T : D \to \mathbb{R}$

Geometrische Operationen in der Ebene entsprechen algebraischen Operationen mit den Koordinaten, z.B.

Translation (Verschiebung)	$(x,y) \mapsto (x+u, y+v)$
zentrische Streckung (Vergrößerung)	$(x,y) \mapsto (\alpha x, \alpha y)\ , \quad \alpha > 1$
Streckung in x-Richtung	$(x,y) \mapsto (\alpha x, y)\ , \quad \alpha > 1$
Streckung in y-Richtung	$(x,y) \mapsto (x, \alpha y), \quad \alpha > 1$
Spiegelung an der x-Achse	$(x,y) \mapsto (x, -y)$
Spiegelung an der y-Achse	$(x,y) \mapsto (-x, y)$
Punktspiegelung im Ursprung	$(x,y) \mapsto (-x, -y)$

($\alpha < 1$: Stauchung / Verkleinerung)

Alle Operationen sind Funktionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Abstand d zweier Punkte $u = (u_1, u_2)\,,\ v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$

- Hilfspunkt (u_1, v_2) . . . rechtwinkliges Dreieck
- Satz des Pythagoras liefert

$$d(u, v) = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2}\,,$$

definiert Abstandsfunktion $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Analog im $\mathbb{R}^3$

- Raumdiagonale
- 2 $\times$ Pythagoras

$$d(u, v) = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2}\,,$$

d.h. $d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto d(u, v)$.

Entsprechend definiert man den Abstand zweier Punkte $u, v \in \mathbb{R}^n$ durch

$$
\begin{aligned}
d(u,v) &:= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (v_i - u_i)^2} \\
&= \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + \ldots + (v_n - u_n)^2}
\end{aligned}
$$

- Kreis mit Radius $r > 0$ um Mittelpunkt $u \in \mathbb{R}^2$

$$K_r(u) = \{v \in \mathbb{R}^2 \,|\, d(u,v) = r\}$$

- analog die Kreisscheibe (Radius $r > 0$, Mittelpunkt $u \in \mathbb{R}^2$)

$$I_r(u) = \{v \in \mathbb{R}^2 \,|\, d(u,v) \leq r\}$$

- $K_r(u)$ ist Lösungsmenge der Gleichung

$$\begin{aligned} & & d(u,v) &= r \\ &\Leftrightarrow & \sqrt{(v_1-u_1)^2 + (v_2-u_2)^2} &= r \\ &\Leftrightarrow & (v_1-u_1)^2 + (v_2-u_2)^2 &= r^2 \end{aligned}$$

(quadratische Gleichung)

- Betrachte nun v_1 als gegeben und suche f so, dass $v_2 = f(v_1)$, d.h. löse nach v_2 auf:

$$v_2 = u_2 \pm \sqrt{r^2 - (v_1 - u_1)^2}\,, \qquad |v_1 - u_1| \leq r$$

- Damit ist $K_r(u)$ Vereinigung der Graphen von f_+ und f_-,

$$f_\pm(v_1) = u_2 \pm \sqrt{r^2 - (v_1 - u_1)^2}\,,$$

beide mit Definitionsbereich

$$\begin{aligned}\big\{x \in \mathbb{R} \,\big|\, |x - u_1| \leq r\big\} &= \big\{x \in \mathbb{R} \,|\, u_1 - r \leq x \leq u_1 + r\big\} \\ &= \big[u_1 - r, u_1 + r\big]\end{aligned}$$

Kugel mit Radius $r > 0$ um Mittelpunkt $u \in \mathbb{R}^3$

- Kugeloberfläche (Sphäre, engl.*sphere*)

$$S_r(u) = \{v \in \mathbb{R}^3 \,|\, d(u,v) = r\}$$

- Vollkugel (engl. *ball*)

$$B_r(u) = \{v \in \mathbb{R}^3 \,|\, d(u,v) \leq r\}$$

Sphäre als Funktionsgraph?

- Sphäre ist Lösungsmenge von

$$(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2 = r^2$$

...auflösen nach v_3

- ... auflösen nach v_3

  $$v_3 = u_3 \pm \sqrt{r^2 - (v_1 - u_1)^2 - (v_2 - u_2)^2}\,, \quad (v_1, v_2) \in I_r(u_1, u_2)$$

  ... zwei Funktionen

  $$f_\pm(v_1, v_2) = u_3 \pm \sqrt{r^2 - (v_1 - u_1)^2 - (v_2 - u_2)^2}$$

  mit Definitionsbereich $D = I_r(u_1, u_2)$.

- Damit ist $S_r(u)$ Vereinigung der Graphen

  $$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z = f_+(x, y)\,,\ (x, y) \in I_r(u_1, u_2)\right\}$$

  und $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z = f_-(x, y)\,,\ (x, y) \in I_r(u_1, u_2)\right\}$

Form	Umfang	Flächeninhalt
Quadrat	$4a$	a^2
Rechteck	$2a + 2b$	ab
Kreis	$2\pi r$	πr^2
Ellipse	keine einfache Formel	πab
Dreieck	$a + b + c$	$\frac{1}{2}gh$

Skizzen: ...

Form	Oberfläche	Volumen (Rauminhalt)
Würfel	$6a^2$	a^3
Quader	$2ab + 2bc + 2ac$	abc
Kugel	$4\pi r^2$	$\frac{4\pi}{3} r^3$
Ellipsoid	keine einfache Formel	$\frac{4\pi}{3} abc$
Prisma, Zylinder	$hU + 2B$	hB
Kegel, Pyramide	keine allgemeine Formel	$\frac{1}{3} hB$

Skizzen: . . .

Beobachtung: Bei einer zentrischen Streckung um einen Faktor $\alpha > 0$ (d.h. $(x, y) \mapsto (\alpha x, \alpha y)$ im $\mathbb{R}^2$, bzw. $(x, y, z) \mapsto (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ im $\mathbb{R}^3$) gilt bei allen Objekten

- Weglängen (z.B. Umfang) wachsen[1] um Faktor α
- Flächen wachsen um Faktor α^2
- Volumina wachsen um Faktor α^3

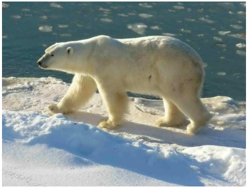
Dies ist formunabhängig.

Anwendung: Bergmannsche Regel
Innerhalb einer Verwandtschaftsreihe sind warmblütige Tiere im kalten Klima großwüchsig.

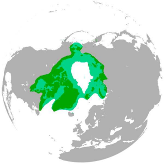
Erklärung:

[1] bzw. schrumpfen für $0 < \alpha < 1$

Eisbär

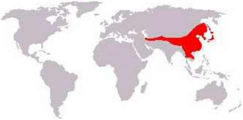


♀ 1,90m–2,10m
♂ 2,40m–2,60m



Kragenbär

1,20m–1,80m



Großer Panda

1,20m–1,50m