Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Trigonometrie

Stefan Keppeler

12. & 19. November 2008

Eberhard Karls Universität Tübingen

Quadratische Gleichungen in einer Variablen sind von der Form

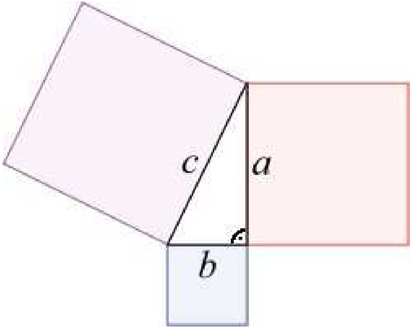
$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit $a \neq 0$ (sonst ist es eine lineare Gleichung) und besitzen die Lösungen

$$x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Erhält man durch quadratische Ergänzung.

Satz: In einem rechtwinklingen Dreieck gilt $a^2 + b^2 = c^2$.



Beweis:

Beispiel: Entfernung des Horizonts

Die gängigen Einheiten zur Winkelmessung sind das Gradmaß und das Bogenmaß ($\varphi = \ell/r$, $\ell =$ Länge des Kreisbogens mit Radius r zum Öffnungswinkel φ).

Gradmaß	Bogenmaß
$360°$	2π
$180°$	π
$90°$	$\pi/2$
$57°\ 17'\ 45''$	1
$45°$	$\pi/4$
$30°$	$\pi/6$
$1°$	$0{,}0175$

Allgemein: $g = (360°/2\pi)b$ bzw. $b = (2\pi/360°)g$.

$(1/60)° = 1' = 1$ (Bogen-)Minute,
$(1/60)' = 1'' = 1$ (Bogen-)Sekunde.

Definition: Winkelfunktionen (im rechtwinkligen Dreieck)

$$\sin = \text{Sinus} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}\,, \qquad \cos = \text{Kosinus} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}\,,$$

$$\tan = \text{Tangens} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}\,, \qquad \cot = \text{Kotangens} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}\,.$$

Die folgenden braucht man eigentlich nicht…

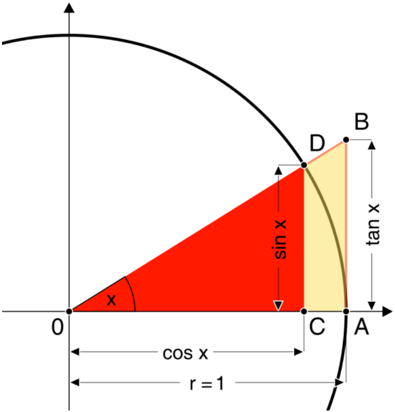
$$\sec = \text{Sekans} = \frac{\text{Hypothenuse}}{\text{Ankathete}}\,, \qquad \csc = \text{Kosekans} = \frac{\text{Hypothenuse}}{\text{Gegenkathete}}\,.$$

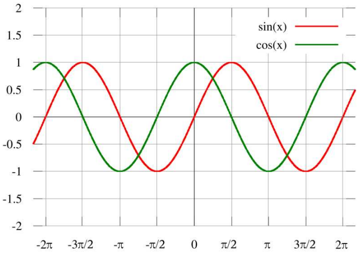
Beispiel: Die Steigung einer schiefen Ebene ist der Tangens des Neigungswinkels.

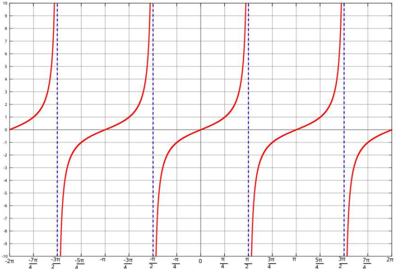
Geometrische Deutung als Streckenlängen mit Vorzeichen am Einheitskreis.

Satz des Pythagoras:

$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1.$







$\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

Periodizität:

- $f(x + 2\pi) = f(x)$ für $f = \sin, \cos, \tan$
- auch $f(x + 2\pi n) = f(x)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$
- für Tangens sogar $\tan(x + n\pi) = \tan x \;\; \forall\, n \in \mathbb{Z}$

Bei Schwingungsphänomenen (Oszillationen), z.B., Vibration, Schall, Licht) oder Rotationsbewegung ist eine Größe $S(t)$ eine periodische Funktion der Zeit, $S(t+T) = S(t)$,

- $T =$ Periode
- $1/T =$ Frequenz $=$ Anzahl Schwingungen pro Zeit $= \nu = f$

Harmonische Oszillationen sind Funktionen der Form

$$S(t) = c\,\sin(\omega t + \alpha) = c\,\cos(\omega t + \beta)\,,$$

- periodisch mit Periode $T = 2\pi/\omega$
- $c =$ Amplitude
- $\alpha =$ Phasenverschiebung
- $\omega =$ (Kreis-)Frequenz $= 2\pi\nu$.

Additionstheoreme (ohne Beweis):

$$\sin(x+y) = \sin x \, \cos y + \cos x \, \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \, \cos y - \sin x \, \sin y.$$

Beispiel:
Bestimmung der Höhe eines Baumes $h = h_1 + s \tan\alpha$
aus der Messung von h_1, s und α.

$\sin$ auf $[-\pi/2, \pi/2]$ streng monoton wachsend
$\rightsquigarrow$ Umkehrfunktion

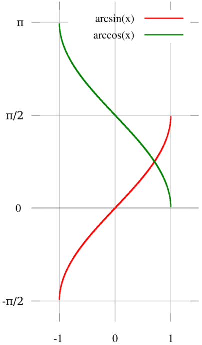
$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$$

entsprechend $\cos$ auf $[0, \pi]$ $\rightsquigarrow$ Umkehrfunktion

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

und $\tan$ auf $(-\pi/2, \pi/2)$ $\rightsquigarrow$ Umkehrfunktion

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$$



Beispiel: Sonnenhöhe
s: Länge eines senkrechten Stabes
b: Länge seines Schattens
Sonnenhöhe: $\varphi = \arctan(s/b)$.