

Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen
Matrizen

Stefan Keppeler

19. & 26. November 2008

Matrizen

Definition, Summe & Produkt
Transponierte

Markow-Prozesse

Beispiel: Einwohnerzahlen
Leslie-Populationsmodell
Beispiel

Drehungen

Rechenregeln

Addition
Multiplikation
Inverse
Addition & Multiplikation
Anwendung der Assoziativität
Potenzen

Definition: Eine $n \times m$ -Matrix $A = (a_{ij})$ ist ein Rechteck-Schema aus Zahlen a_{ij} in n Zeilen und m Spalten, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. Die Menge aller $n \times m$ -Matrizen bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(n, m)$.

Die **Summe** $A + B$ zweier $n \times m$ -Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ ist die $n \times m$ -Matrix mit den Einträgen $a_{ij} + b_{ij}$.

Das **Produkt** AB einer $n \times m$ -Matrix $A = (a_{ij})$ mit einer $m \times \ell$ -Matrix $B = (b_{rs})$ ist die $n \times \ell$ -Matrix $C = (c_{is})$ mit den Einträgen (Komponenten)

$$c_{is} = \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{js}.$$

Definition: Die **Transponierte** A^T einer $n \times m$ -Matrix $A = (a_{ij})$ ist die $m \times n$ -Matrix mit den Einträgen a_{ji} .

A heißt **symmetrisch**, wenn $A^T = A$.



Bemerkung: Vektoren lassen sich als Matrizen auffassen; man muss sich nur festlegen, ob sie

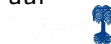
Spaltenvektoren (und damit $n \times 1$ -Matrizen) oder
Zeilenvektoren (und damit $1 \times n$ -Matrizen) sind.

Sei $A \in \mathcal{M}(n, m)$ und $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$, aufgefasst als Spaltenvektor $\vec{x} \in \mathcal{M}(m, 1)$. Dann ist

$A\vec{x} \in \mathcal{M}(n, 1)$ ein Spaltenvektor,



für den wir einfach schreiben $A\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, genannt “ A angewandt auf den Vektor \vec{x} ”.



Anwendung: Markov-Prozess in diskreter Zeit

- ▶ Individuum einer Gesamtheit im Zustand j
→ Zeitschritt →
Wahrscheinlichkeit w_{ij} , für Übergang in den Zustand i
- ▶ n mögliche Zustände: Zahlen $w_{ij} \in [0, 1]$ bilden $n \times n$ -Matrix, die **Übergangsmatrix** W des Markov-Prozesses.
- ▶ Zeitpunkt $t = 0$: $N_j^{(0)}$ Individuen im Zustand j
Populationsvektor: $N^{(0)} = (N_1^{(0)}, \dots, N_n^{(0)}) \in \mathbb{R}^n$
- ▶ Zeitpunkt $t = 1$: näherungsweise für große $N_j^{(0)}$

$$N_j^{(1)} = w_{j1}N_1^{(0)} + w_{j2}N_2^{(0)} + \dots + w_{jn}N_n^{(0)}$$

kurz

$$N^{(t+1)} = WN^{(t)}.$$

Beispiel: Tübingen hat 84.000 Einwohner, Reutlingen 112.000. Wenn jedes Jahr 5% der Einwohner Tübingens nach Reutlingen umzögen und 10% der Einwohner Reutlingens nach Tübingen (keine sonstigen Umzüge, keine Geburten oder Todesfälle), gilt

$$N^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,1 \\ 0,05 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 84.000 \\ 112.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 91.000 \\ 105.000 \end{pmatrix} \cdot \img alt="pencil icon" data-bbox="875 388 923 455"/>$$

Folgejahr (gleiche Übergangswahrscheinlichkeiten):

$$N^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,1 \\ 0,05 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 91.000 \\ 105.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96.950 \\ 99.050 \end{pmatrix} \cdot$$

Gleichgewichtslage oder **stationäre Verteilung** falls $WN = N$, d.h. gleich viele Umzüge in jeder Richtung:

$$0,05 N_1 = 0,1 N_2 \quad \Rightarrow \quad N_1 = 2N_2$$

Wegen $N_1 + N_2 = 196.000$, folgt $N_1 = 130.667$ und $N_2 = 65.333$.

→ MATLAB



Anwendung: Leslie-Populationsmodell

- ▶ Jedes Individuum einer Gesamtheit befindet sich zu einem Zeitpunkt in einem von n Zuständen.
- ▶ Ein Individuum im Zustand j erzeugt im Mittel l_{ij} Individuen im nächsten Schritt im Zustand i ; diese Werte bilden die Leslie-Matrix $L = (l_{ij}) \in \mathcal{M}(n, n)$.
- ▶ $N^{(t)} = (N_1^{(t)}, \dots, N_n^{(t)})$: Populationsvektor zur Zeit t , dann ist im Mittel (und für große Besetzungszahlen näherungsweise)

$$N^{(t+1)} = LN^{(t)}.$$

Beispiel: Fibonacci-Hasen (vgl. Vorlesung 3)



Beispiel:

- ▶ Gesamtheit = Population
- ▶ Zustand i = Alter in Jahren $\in \{0, \dots, n\}$
- ▶ Individuum von i Jahren setzt im Mittel ν_i Nachkommen (vom Alter 0) in die Welt und geht selbst in den Zustand $i + 1$ über – wenn es nicht stirbt.
- ▶ Ein Individuum von j Jahren überlebt noch mindestens ein Jahr mit Wahrscheinlichkeit $s_j \in [0, 1]$, $s_n = 0$.

Also

$$N_0^{(t+1)} = \sum_{j=0}^n \nu_j N_j^{(t)}$$

und

$$N_i^{(t+1)} = s_{i-1} N_{i-1}^{(t)}$$

für $1 \leq i \leq n$.

$$L = \begin{pmatrix} \nu_0 & \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_n \\ s_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & s_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$



Anwendung: Die Drehung der Ebene \mathbb{R}^2 um den Ursprung um den Winkel φ (gegen den Uhrzeigersinn) entspricht in Koordinaten der Anwendung der Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \img alt="pencil icon" data-bbox="658 531 707 598"/>$$

Rechenregeln Addition: Seien $A, B, C \in \mathcal{M}(n, m)$. Dann gilt

- ▶ $A + B = B + A$ (Kommutativität)
- ▶ $(A + B) + C = A + (B + C)$ (Assoziativität)
- ▶ $A + 0 = A$ mit der “Nullmatrix” 0 ,
die als Einträge lauter Nullen hat
(neutrales Element der Addition)
- ▶ $A + (-A) = 0$ mit $-A = (-a_{ij})$
(Existenz von additiv-inversen [negativen] Elementen).

Rechenregeln Multiplikation:

Seien $A \in \mathcal{M}(n, m)$, $B \in \mathcal{M}(m, \ell)$ und $C \in \mathcal{M}(\ell, k)$.

- ▶ Kommutativität gilt i.A. nicht! (Beispiel Übungsaufgabe), d.h. i.A. $AB \neq BA$
- ▶ $(AB)C = A(BC)$ (Assoziativität)
- ▶ $A0 = 0 = 0A$
- ▶ $AI = A = IA$ mit der **Einheitsmatrix**

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

(I = neutrales Element der Multiplikation).

Einträge mit dem **Kronecker-Symbol**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

also $I = (\delta_{ij})$.




- Für manche, aber nicht für alle $A \in \mathcal{M}(n, n)$ mit $A \neq 0$ existiert eine **inverse Matrix** A^{-1} mit der Eigenschaft


$$A^{-1}A = I = AA^{-1}.$$

Solche A heißen **invertierbar**.

- Ist A invertierbar, dann ist die Inverse eindeutig, d.h., wenn $B, C \in \mathcal{M}(n, n)$ mit

$$BA = I = AB \quad \text{und} \quad CA = I = AC$$

dann folgt $B = C$. 

- Ein Beispiel für eine nicht-invertierbare Matrix $A \neq 0$ ist die Matrix aus der Übungsaufgabe mit $A^2 = 0$. 

Rechenregeln Addition und Multiplikation:

▶ $(A + B)C = AC + BC$

für $A, B \in \mathcal{M}(n, m)$ und $C \in \mathcal{M}(m, \ell)$,

▶ $A(B + C) = AB + AC$

für $A \in \mathcal{M}(n, m)$ und $B, C \in \mathcal{M}(m, \ell)$. (Distributivgesetze)

▶ $A(-B) = (-A)B = -(AB)$.

Anwendung der Assoziativität: Aus

$$N^{(t+1)} = LN^{(t)}$$

für Markow-Prozesse und Leslie-Modelle folgt

$$\begin{aligned} N^{(t)} &= L(L(L(\dots(LN^{(0)})\dots))) \\ &= (\dots((LL)L)\dots)LN^{(0)} = L^t N^{(0)}, \end{aligned}$$

wobei Potenzen von Matrizen $L^t = LLL \cdots L$ (mit t Faktoren) nur für $L \in \mathcal{M}(n, n)$ und i.A. nur für Exponenten $t \in \mathbb{N}_0$ definiert sind – bei invertierbaren Matrizen auch für $t \in \mathbb{Z}$.

Potenzrechenregeln:

- ▶ $A^n A^m = A^{n+m}$
- ▶ $A^1 = A$
- ▶ $A^0 = I$ für $A \neq 0$
- ▶ $(A^n)^m = A^{nm}$

Vorsicht: i.A. $(AB)^n \neq A^n B^n$, denn z.B.

$$(AB)^2 = ABAB \neq AABB = A^2 B^2.$$