Lineare Gleichungssysteme

Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Stefan Keppeler

3. Dezember 2008

Definition: Ein lineares Gleichungssystem (LGS) ist ein System von n Gleichungen der Form

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, x_j = b_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

mit Unbekannten $x_1, \ldots, x_m$ und
bekannten Koeffizienten a_{ij} und b_i.

- Äquivalent kann man schreiben $A\vec{x} = \vec{b}$,
  wobei $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ gesucht ist, und
  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(n, m)$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ vorgegeben sind.
- Das Gleichungssystem heißt homogen, falls $\vec{b} = \vec{0}$,
  sonst inhomogen.
- Die Lösungsmenge ist

$$L_{\vec{b}} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \,|\, A\vec{x} = \vec{b}\,\}.$$

Beispiel: Tomographie

- Transmissionskoeffizienten (2D)

α_{11}	α_{12}
α_{21}	α_{22}

- Schattenbild ergibt Gesamttransmission
  $\lambda_1 = \alpha_{11}\alpha_{12}, \quad \lambda_2 = \alpha_{21}\alpha_{22},$
  $\mu_1 = \alpha_{11}\alpha_{21}, \quad \mu_2 = \alpha_{12}\alpha_{22}.$
- Logarithmieren, $\log\lambda_1 = \log\alpha_{11} + \log\alpha_{12}$ etc., führt auf das LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log\alpha_{11} \\ \log\alpha_{12} \\ \log\alpha_{21} \\ \log\alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log\lambda_1 \\ \log\lambda_2 \\ \log\mu_1 \\ \log\mu_2 \end{pmatrix}$$

Lösung durch Eliminationsverfahren / Gauß-Algorithmus:
Füge Daten A und $\vec{b}$ zur einer $n \times (m+1)$-Matrix $B = (A|\vec{b}\,)$ zusammen. Erlaubte Operationen:

1. **Vertauschen** zweier Zeilen von B.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

2. **Multiplikation** einer Zeile von B mit Faktor $\alpha \neq 0$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot 2 \\ \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right)$$

3. **Addition** des α-fachen einer Zeile von B zu einer anderen.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} -4 \\ + \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{array}\right)$$

Anwendung am folgenden LGS

$$\begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 16 && (1)\\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 14 && (2)\\ -5x_1 - 5x_2 - \tfrac{2}{3}x_3 - \tfrac{11}{3}x_4 &= -\tfrac{23}{3} && (3) \end{aligned}$$

kompakt geschrieben:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & 3 & -2 & 16 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\ -5 & -5 & -2/3 & -11/3 & -23/3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & 3 & -2 & 16 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\ -5 & -5 & -2/3 & -11/3 & -23/3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid -1/4 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3/4 & -1/2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\ -5 & -5 & -2/3 & -11/3 & -23/3 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2 \quad 5 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow \quad + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3/4 & -1/2 & 4 \\ 0 & 0 & 3/2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 37/12 & -37/6 & -37/3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid \cdot 2/3 \\ \mid \cdot 12/37 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3/4 & -1/2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -1 \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3/4 & -1/2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

LGS ist nun auf Zeilenstufenform,
allgemein: ($*$ heißt "kann $\neq 0$ sein")

$$\left(\begin{array}{cccccccccc|c}
0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \boxed{1} & * & \cdots & \cdots & * & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \boxed{1} & * & \cdots & * & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & * \\
\vdots & & & & & & & & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & *
\end{array}\right)$$

Bemerkung: Ob an den Stufen wirklich 1en stehen ist egal, entscheidend ist, dass die Zahlen in den Kästchen $\neq 0$ sind.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3/4 & -1/2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Diesem Schema entsprechen die umgeformten Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \tfrac{3}{4}x_3 - \tfrac{1}{2}x_4 &= 4 \\ x_3 - 2x_4 &= 4. \end{aligned}$$

- Auflösen nach x_1 und x_3:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 - x_2 - \tfrac{3}{4}x_3 + \tfrac{1}{2}x_4 \\ x_3 &= 4 + 2x_4 \end{aligned}$$

- Wähle $x_2 = s \in \mathbb{R}$, $x_4 = t \in \mathbb{R}$ beliebig $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - s - t \\ x_3 &= 4 + 2t \end{aligned}$$

Damit ist die allgemeine Lösung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Anders gesagt, die Lösungsmenge ist

$$L_{\vec{b}} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Definition: Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt Unterraum (des $\mathbb{R}^n$), falls U ebenfalls ein Vektorraum ist, d.h insbesondere falls aus $\vec{u}, \vec{v} \in U$ folgt, dass auch $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in U \ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Definition:
Der von den Vektoren $\vec{u}^{(1)}, \ldots, \vec{u}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ aufgespannte Unterraum ist die Menge

$$\left\langle \vec{u}^{(1)}, \ldots, \vec{u}^{(k)} \right\rangle := \left\{ \alpha_1 \vec{u}^{(1)} + \ldots + \alpha_k \vec{u}^{(k)} \,\middle|\, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

- $\alpha_1 \vec{u}^{(1)} + \ldots + \alpha_k \vec{u}^{(k)}$ heißt Linearkombinationen (LK) der Vektoren $\vec{u}^{(1)}, \ldots, \vec{u}^{(k)}$.
- Unterräume heißen auch Teilräume oder lineare Teilräume.
- Im Fall $k = 0$ setzen wir $\langle\ \rangle = \{\vec{0}\}$.

Satz: Die Lösungsmenge $L_{\vec{0}} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \,|\, A\vec{x} = \vec{0}\,\}$ eines homogenen linearen Gleichungssystems ist stets ein Unterraum.

Beweis:

Satz: Ist $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ irgendeine Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$, ist also $A\vec{u} = \vec{b}$, dann ist die Lösungsmenge $L_{\vec{b}} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \,|\, A\vec{x} = \vec{b}\,\}$ gegeben durch

$$L_{\vec{b}} = \vec{u} + L_{\vec{0}} := \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \;|\; \vec{x} = \vec{u} + \vec{y}\,,\; \vec{y} \in L_{\vec{0}}\right\}.$$

Beweis:

Beachte: $L_{\vec{b}}$ kann leer sein, obwohl $L_{\vec{0}}$ nie leer ist.

Bemerkung: Mengen der Form $\vec{u} + L_{\vec{0}}$, wobei $L_{\vec{0}}$ ein Unterraum ist, heißen auch affine Teilräume. Sie entstehen aus (linearen) Teilräumen durch Translation.

- Anton und Berta sind Geschwister
- Anton hat doppelt so viele Schwestern wie Brüder
- Berta hat gleich viele Schwestern wie Brüder

Wieviele Kinder gibt es in der Familie?