

Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen
Konvergenz und Stetigkeit

Stefan Keppeler

10. Dezember 2008

Konvergenz

Beschränktheit

Folgenkonvergenz

Beispiele

Reihen

Sätze

Stetigkeit

Definition

Beispiele

Fourierreihen

Obertöne

Geometrische Reihe

Definition: Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ heißt **beschränkt**, wenn es ein $r > 0$ gibt mit $\|f(x)\| \leq r$ für alle $x \in D$.

Merke: Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann beschränkt, wenn ihr Graph in einem horizontalen Streifen eingeschlossen ist. Eine unbeschränkte Funktion wächst “ins Unendliche”.

Beispiele: (nächste Seite) 

Funktion f	$D \rightarrow \mathbb{R}^d$	beschränkt?
\sin, \cos	$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	ja, $r = 1$
\arcsin, \arccos	$[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$	ja, $r = 2\pi$
\tan	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$	nein
\arctan	$\mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	ja, $r = \frac{\pi}{2}$
\exp	$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	nein
\exp	$(-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$	ja, $r = 1$
\log	$(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$	nein
Fibonacci	$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$	nein
$x \mapsto x^\alpha$	$(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$	ja für $\alpha = 0$, nein für $\alpha \neq 0$
$x \mapsto x^\alpha$	$[1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$	ja für $\alpha \leq 0$, nein für $\alpha > 0$
$x \mapsto Ax$	$\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$	ja für $A = 0$, sonst nein
für $A \in \mathcal{M}(n, m)$		
$x \mapsto \ x\ $	$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$	nein

Definition: Eine Folge a_1, a_2, a_3, \dots von Vektoren $a_n \in \mathbb{R}^d$ heißt **konvergent gegen den Vektor** $a \in \mathbb{R}^d$, geschrieben

- ▶ $a_n \rightarrow a$ oder
- ▶ $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ oder
- ▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$,

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n > n_0$ gilt $\|a_n - a\| < \varepsilon$.



Kurz: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 : \|a_n - a\| < \varepsilon$.

- ▶ In diesem Fall heißt a der **Grenzwert** oder **Limes** der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$; man sagt auch, a_n **geht gegen** a .
- ▶ Ist eine Folge gegen keinen Vektor konvergent, so heißt sie **divergent**.

Beispiele:

- ▶ $a_n = \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$ konvergiert gegen 0.
- ▶ $+1, -1, +1, -1, +1, \dots$ (d.h. $a_n = (-1)^n$) divergiert.
- ▶ Die Folge

$$1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \dots,$$

$$\text{d.h. } a_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

konvergiert gegen 2.



Allgemein nennt man eine Folge der Form

$$a_n = \sum_{k=0}^n b_k$$

eine **(unendliche) Reihe** und nennt den Ausdruck

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n b_k \quad \text{oder} \quad b_0 + b_1 + b_2 + \dots$$

konvergent gegen a wenn die **Folge der Partialsummen** a_n gegen a konvergiert. Man nennt dann a auch den **Wert** dieses Ausdrucks.

Satz (ohne Beweis): Eine Folge a_n in \mathbb{R}^d konvergiert genau dann (dann und nur dann) gegen $a \in \mathbb{R}^d$, wenn in \mathbb{R} jede Komponente $a_{n,i}$ gegen a_i konvergiert. (“Konvergenz gilt **komponentenweise**.”)

Da sich eine Folge als Funktion $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ auffassen lässt, ist sie genau dann beschränkt, wenn es ein $r > 0$ gibt, so dass $-r \leq a_n \leq r$ für alle Folgenglieder a_n gilt.

Satz (ohne Beweis): Jede konvergente Folge in \mathbb{R}^d ist **beschränkt**. 

Folgerungen:

- ▶ Die Fibonacci-Folge divergiert.
- ▶ Die Folge $0, 2, 4, 6, \dots$ der geraden Zahlen divergiert.

Bemerkung:

Es gibt zwei Arten zu divergieren: entweder ins Unendliche, oder beschränkt (rastloses Umherlaufen wie $+1, -1, +1, -1, \dots$).




Satz (ohne Beweis):

Ist eine Folge **monoton** und **beschränkt**, so konvergiert sie. 

Satz (ohne Beweis): Wenn für die Zahlenfolgen a_n, b_n und c_n gilt

▶ $a_n \leq b_n \leq c_n$ sowie

▶ $a_n \rightarrow a$ und $c_n \rightarrow a$,

dann gilt auch $b_n \rightarrow a$. 

Satz (ohne Beweis): Wenn die Folgen $a_n, b_n \in \mathbb{R}^d$ konvergieren, $a_n \rightarrow a$ und $b_n \rightarrow b$, dann konvergieren auch

▶ die Summen, $a_n + b_n \rightarrow a + b$, und

▶ die Vielfachen, $\lambda a_n \rightarrow \lambda a$ ($\forall \lambda \in \mathbb{R}$)

▶ Sind $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ Zahlenfolgen (statt Vektoren), dann konvergieren auch die Produkte, $a_n b_n \rightarrow ab$.



Definition: Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt **stetig**, wenn für jede konvergente Folge $a_n \rightarrow a$ mit $a_n \in D, a \in D$ gilt $f(a_n) \rightarrow f(a)$.



Beispiele:

- ▶ Die **Heaviside-Funktion**

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

ist nicht stetig, weil die Folge $a_n = -\frac{1}{n}$ gegen $a = 0$ konvergiert, aber $f(a_n) = 0$ für alle n , während $f(a) = 1$.

- ▶ \sin , \cos , \arctan , \exp sind stetig auf \mathbb{R}
- ▶ \arcsin , \arccos sind stetig auf $[-1, 1]$
- ▶ \log , $x \mapsto x^\alpha$ sind stetig auf $D = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$,
- ▶ $x \mapsto Ax$, $x \mapsto \|x\|$ sind stetig auf $D = \mathbb{R}^m$.

Merke: Anschaulich ist eine Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, wenn man ihren Graphen zeichnen kann, ohne abzusetzen.



Satz über Fourierreihen (ohne Beweis):

Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und periodisch mit Periodenlänge T , dann gibt es reelle Zahlen $c_0, c_1, c_2, \dots \geq 0$ und $\varphi_1, \varphi_2, \dots \in [0, 2\pi)$ so, dass

$$f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\omega t + \varphi_k)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei $\omega = \frac{2\pi}{T}$.


Die rechte Seite heißt die **Fourier-Reihe** von f .



Anwendung: Obertonreihe in der Akustik

- ▶ Ton (Schwankung des Luftdrucks): Überlagerung harmonischer Schwingungen der Form $\sin(\omega t + \varphi)$
- ▶ Frequenzen: ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz, d.h. $c_k \sin(k\omega t + \varphi_k)$.
 - ▶ Term mit $k = 1$: **Grundton**
 - ▶ Terme mit $k \geq 2$: **Obertöne**
- ▶ c_k heißt Amplitude, φ_k die Phasenverschiebung
- ▶ c_k^2 ist die Intensität (Energieinhalt) der k -ten Oberschwingung



Satz: Die **geometrische Folge** $a_n = q^n$, $q \in \mathbb{R}$ konvergiert genau dann, wenn $-1 < q \leq 1$; für $q = 1$ konvergiert sie gegen 1, für $|q| < 1$ gegen 0. 

Satz: Die **geometrische Reihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

mit $q \in \mathbb{R}$ konvergiert gegen $\frac{1}{1-q}$, wenn $|q| < 1$, und divergiert andernfalls. 