

Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen
Uneigentliche Integrale &
mehrdimensionale Differenzialrechnung

Stefan Keppeler

14. Januar 2009

Uneigentliche Integrale

Unendlich

Integrand divergiert

Grenze ∞

Mehrdimensionale Differenziation

Partielle Ableitungen

Richtungsableitungen

Totale Ableitung ∇ , Tangentialebene

Zweite Ableitungen

Definition: Die Zahlenfolge a_n geht gegen unendlich, $a_n \rightarrow \infty$, falls $\forall r > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : a_n > r$, d.h. wenn jeder noch so große Wert r schließlich überschritten wird.

a_n geht gegen minus unendlich, $a_n \rightarrow -\infty$, wenn $-a_n \rightarrow \infty$.

Beispiel: Für die Funktion (Sättigungskurve)

$$f(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{mit } \lambda > 0$$

gilt: $f(a_n) \rightarrow 1$ für jede Zahlenfolge a_n mit $a_n \rightarrow \infty$. 

Man schreibt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 \quad \text{oder} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1.$$

- ▶ Bisher können wir $\int_a^b f(x) dx$, mit $a, b \in \mathbb{R}$ und f stetig.
- ▶ Nun divergiere der Integrand bei $c \in [a, b]$. 
- ▶ Dann definieren wir

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{c+\delta}^b f(x) dx,$$

falls alle Grenzwerte existieren.

Beispiel: $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ 

- Ist dagegen eine Integrationsgrenze gleich $\pm\infty$,
so definieren wir analog

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \quad \text{bzw.}$$

$$\int_{-\infty}^b g(x) dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b g(x) dx$$

(für f stetig auf $[a, \infty)$ und g stetig auf $(-\infty, b]$).

Beispiel: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ 

Halten wir in der Funktion $f(x, y)$, d.h. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die Variable y fest ("behandeln y als Zahl") und leiten dann (nach x) ab, so bilden wir die **partielle Ableitung von f nach x** ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

Bemerkung: $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Umgekehrt:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Beispiel:

$$f(s, t) = se^t + \sin(st), \quad \frac{\partial f}{\partial s} = \text{pencil}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \text{pencil}$$

- ▶ $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$; partielle Ableitung nach x_1 ist
Ableitung in Richtung von $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{e}_1) - f(\vec{x})}{h} \quad \img alt="pencil icon" data-bbox="740 255 790 325"/>$$

- ▶ Richtungsableitungen in beliebiger Richtung:
 $\vec{e} \in \mathbb{R}^d$ mit $\|\vec{e}\| = 1$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{e}) - f(\vec{x})}{h} \quad \left(=: \frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(\vec{x}) \right) \quad \img alt="pencil icon" data-bbox="770 525 820 595"/>$$

- ▶ Richtungsableitung lässt sich aus den partiellen Ableitungen berechnen, z.B. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{e} = (e_1, e_2)$,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = e_1 \frac{\partial f}{\partial x} + e_2 \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$

- Der Vektor mit den Komponenten $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ heißt **Gradient** von f ,

$$\text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d} \right),$$

und ist ein **Vektorfeld**, d.h. eine Funktion $\nabla f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$.

- $\nabla f(x)$: **Richtung des steilsten Anstiegs**
 $\|\nabla f(x)\|$: Steigung (Richtungsableitung) in dieser Richtung 
- **Tangentialebene** T an den Graphen von f im Punkt $\vec{\xi}$:

$$T(\vec{x}) = f(\vec{\xi}) + \nabla f(\vec{\xi}) \cdot (\vec{x} - \vec{\xi}) = f(\vec{\xi}) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{\xi}) (x_i - \xi_i).$$

wobei $\vec{u} \cdot \vec{v}$ für $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^d$ das **Skalarprodukt** ($\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$) ist,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^d u_i v_i = (u_1, \dots, u_d) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} = \vec{u}^T \vec{v}$$



- $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ hat d erste partielle Ableitungen und d^2 zweite partielle Ableitungen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f,$$

- die die sogenannte **Hesse-Matrix** H bilden. **Beispiel:** $f(x, y)$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Satz: Wenn die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar ist und die zweiten partiellen Ableitungen stetig sind, dann gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Folgerung: H ist dann eine symmetrische Matrix, $H^T = H$.



Satz:

- ▶ Hat die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ in $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ ein (lokales) Minimum oder Maximum, so ist $\nabla f(\vec{x}) = 0$.
- ▶ Ist umgekehrt $\nabla f(\vec{x}) = 0$ und die Hesse-Matrix $H(\vec{x})$
 - ▶ **positiv-definit**, so hat f in \vec{x} ein **lokales Minimum**.
 - ▶ **negativ-definit**, so hat f in \vec{x} ein **lokales Maximum**. 

Definition: Eine symmetrische Matrix $A \in \mathcal{M}(n, n)$ heißt

- ▶ positiv-definit, wenn für alle $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{u} \neq 0$ gilt $\vec{u}^T A \vec{u} > 0$.
- ▶ negativ-definit, wenn für alle $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{u} \neq 0$ gilt $\vec{u}^T A \vec{u} < 0$.