Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Differenzialgleichungen

Stefan Keppeler

28. Januar 2009

- Differenzialgleichungen
  - Definition
  - Beispiele: Populationsdynamik
- Existenz und Eindeutigkeit
  - Satz von Picard und Lindelöf
  - Folgerungen/Bemerkungen
- Reduktion...
  - ...von DGLn höherer Ordnung auf Systeme 1. Ordung
  - Folgerungen/Bemerkungen
- Beispiel
  - Reaktions-Kinetik

Definition: Eine Differenzialgleichung (DGL) ist eine funktionale Beziehung zwischen einer Funktion $\vec{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$, $t \mapsto \vec{x}(t)$, und ihren ersten k Ableitungen, d.h.

$$\frac{\mathrm{d}^k \vec{x}}{\mathrm{d}t^k}(t) = \vec{f}\left(\vec{x}(t), \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}(t), \ldots, \frac{\mathrm{d}^{k-1}\vec{x}}{\mathrm{d}t^k}(t), t\right) . \qquad (*)$$

- Dabei heißt
  - k die Ordnung der DGL,
  - d die Dimension bzw. die Anzahl der Freiheitsgrade.
- $(*)$ heißt auch auch System von d gekoppelten Gleichungen, wenn man statt des Vektors $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^d$ die Komponenten $x_1(t), \ldots, x_d(t) \in \mathbb{R}$ als abhängige Variablen auffaßt.
- Falls f nicht von t abhängt, so heißt die DGL autonom.

Beispiele:

Population habe konstante Wachstumsrate[1]

$$w = g - s$$

mit

- $g =$ Geburtenrate,
- $s =$ (natürliche) Sterberate.

Einfachstes Modell für Populationsgröße $N(t)$ ist

$$\dot{N} = wN\,.$$

- autonome DGL
- erster Ordnung ($k = 1$)
- in einem Freiheitsgrad ($d = 1$)

Allgemeinen Lösung (exponentielles Wachstum):

$$N(t) = N_0\, e^{wt}\,.$$

[1] vgl. `Notizen 2009-01-14`

Entnimmt der Mensch (durch Ernten, Jagen, Fischen) die Menge $E(t)\,dt$ im Zeitintervall $[t, t+dt]$, so lautet die DGL

$$\dot{N} = wN - E\,.$$

Diese Gleichung ist nicht autonom, $f(N,t) = wN - E(t)$.

Typische Fragestellungen:

- Funktion $t \mapsto E(t)$ explizit bekannt, z.B. $E(t) = c\,\sin(\omega t)$: Bestimme Lösung $N(t)$ (analytisch oder numerisch).
- Oft stellt man aber auch die Frage, wie man E wählen sollte, um ein bestimmtes Verhalten von N zu erhalten (z.B. keine dramatische Schrumpfung).

Satz von Picard und Lindelöf (1890)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ und f ein Vektorfeld auf D, $f : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$.
Wir betrachten das Anfangswertproblem (AWP)

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, t)\,, \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0\,. \tag{$*$}$$

Unter technischen Bedingungen an D und f (D eine offene Menge, f erfüllt eine Lipschitz-Bedingung) gilt:

- Für jedes $\vec{x}_0 \in D$ existiert genau eine Lösungsfunktion $t \mapsto \vec{x}(t)$ von $(*)$.
- Die Lösung ist definiert auf einem Intervall $(T_{\text{Anfang}}, T_{\text{Ende}})$, das t_0 enthält,
- wobei $T_{\text{Anfang}} = -\infty$ und/oder $T_{\text{Ende}} = \infty$ sein kann, aber nicht sein muss.

Folgerung/Bemerkungen:

- Zwei Lösungskurven können sich nie schneiden, denn falls

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) \qquad \text{und} \qquad \dot{\vec{y}} = \vec{f}(\vec{y})$$
$$\text{sowie} \quad \vec{x}(t_0) = \vec{y}(t_0)$$

$\Rightarrow \quad \vec{x}(t) = \vec{y}(t)$ für alle t.

- Eine Lösung $\vec{x}(t)$ kann nach endlicher Zeit aufhören zu existieren, indem sie
  - den Rand des Definitionsbereiches D erreicht.
    Beispiel: x reell und positiv: $D = [0, \infty)$.
    Sinkt $x(t)$ auf Null, so kann es nicht mehr weiter sinken. (z.B. Populationsgröße)
  - sie in endlicher Zeit ins Unendliche wächst (Singularität).

    Beispiel:

Jede DGL ist äquivalent zu einem DGL-System erster Ordnung, indem man für die Ableitungen von x neue Variablen einführt.

Beispiel: Aus ($k = 2$, $d = 1$)

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

machen wir

- ein DGL (System) erster Ordnung mit zwei Gleichungen ($k = 1$, $d = 2$);
- kd ändert sich nicht.

Allgemein wird aus einer DGL der Ordnung k

$$\frac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d}t^k} = f\left(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{k-1}x}{\mathrm{d}t^{k-1}}, t\right)$$

ein DGL-System erster Ordnung mit k Gleichungen:

$$\begin{aligned}
x_1 &:= x & & & \dot{x}_1 &= x_2\\
x_2 &:= \dot{x} & &= \dot{x}_1 & \dot{x}_2 &= x_3\\
x_3 &:= \ddot{x} & &= \dot{x}_2 & \dot{x}_3 &= x_4\\
&\vdots & &\vdots & &\vdots\\
x_k &:= \frac{\mathrm{d}^{k-1}x}{\mathrm{d}t^{k-1}} & & & \dot{x}_k &= f(x_1, \ldots, x_k, t)
\end{aligned}$$

Der Raum $\mathbb{R}^k$ mit den Achsen $x_1, \ldots, x_k$ heißt Phasenraum.

Folgerungen/Bemerkungen:

- Mit Picard-Lindelöf übeträgt sich Existenz und Eindeutigkeit; Dabei sind bei einer DGL der Ordnung k als Anfangswerte die Werte von $x(t_0)$, $\dot{x}(t_0)$, $\ldots$, $\frac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d}t}(t_0)$ vorzugeben.
- Im Phasenraum können sich zwei Lösungskurven nie schneiden.
- Gilt analog für eine System der Ordnung k mit d Gleichungen: Diese lassen sich auf ein System erster Ordung mit kd Gleichungen umschreiben.

Michaelis-Menten-Kinetik (1913): Reaktion unter Einfluss eines Enzyms,

$$S + E \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} SE, \quad SE \xrightarrow{k_2} P + E\,.$$

- S Substrat
- E Enzym
- SE Komplex
- P Produkt
- k_{-1}, k_1 und k_2 Ratenkonstanten (Parameter); legen Reaktionsraten (Reaktionsgeschwindigkeiten) fest.

Massenwirkungsgesetz: Reaktionsrate ist proportional ist zum Produkt der Konzentrationen der Reaktanten,

$$s = [S], \quad e = [E], \quad c = [SE], \quad p = [P].$$

Massenwirkungsgesetz liefert DGL-System:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -k_1 es + k_{-1}c\,, \qquad \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = -k_1 es + (k_{-1} + k_2)c$$

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = k_1 es - (k_{-1} + k_2)c\,, \qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = k_2 c.$$

Anfangsbedingungen:

$$s(0) = s_0, \quad e(0) = e_0, \quad c(0) = 0, \quad p(0) = 0\,.$$

Die Lösung dieses Anfangswertproblems liefert uns die Konzentrationen als Funktion der Zeit.

Vereinfachungen:

- Die letzte Gleichung ist entkoppelt (p taucht nur dort auf)

$$\Rightarrow \qquad p(t) = k_2 \int_0^t c(u)\,\mathrm{d}u \qquad p \text{ ist allein durch } c \text{ bestimmt}$$

- Enzym E ist Katalysator: Gesamtkonzentration (frei plus kombiniert) ist konstant,

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad e(t) + c(t) = e_0\,.$$

  Erhaltungssatz (vgl. z.B. Energie-Erhaltungssatz in der Physik). Folgt aus DGL-System, indem man die zweite und die dritte Gleichung addiert.

Wir erhalten somit das vereinfachte DGL-System

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -k_1 e_0 s + (k_1 s + k_{-1})c\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = k_1 e_0 s - (k_1 s + k_{-1} + k_2)c$$

mit Anfangsbedingungen $s(0) = s_0, c(0) = 0$.

Nicht analytisch lösbar, **aber** qualitatives Verhalten ablesbar:

- Bei $t = 0$ fällt s, während c steigt, von 0 beginnend
- solange c noch klein ist, muss s weiter fallen und c weiter steigen
- c steigt so lange bis $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = 0$, d.h. $c = \frac{k_1 e_0 s}{k_1 s + k_{-1} + k_2}$;
  an dieser Stelle gilt $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -k_2 c$, also fällt s immer noch.