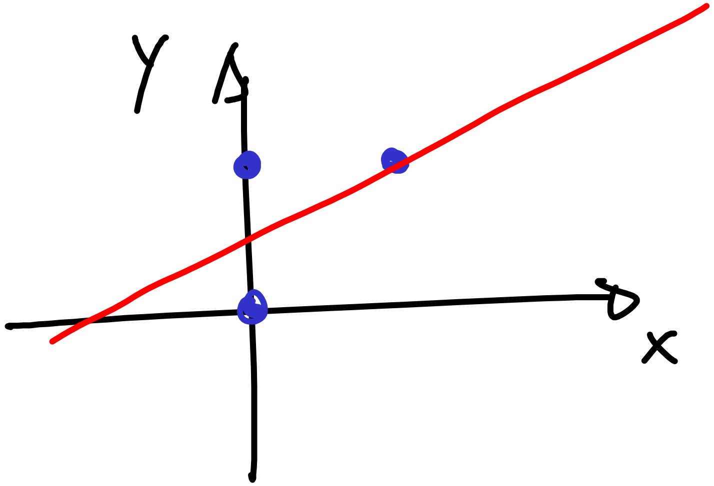
$\boxed{4}$

a)

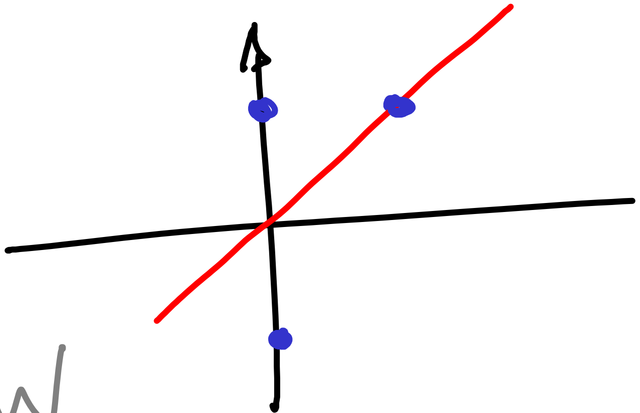


F

Regressionsgerade minimiert (Quadrate der) vertikale Abstände

→ durch die Mitte

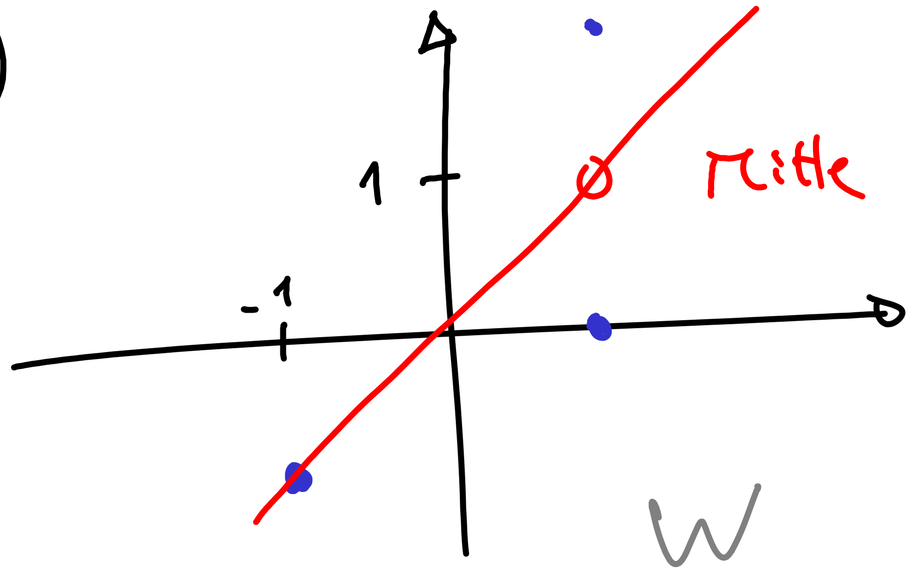
b)



W

c) W

d)



W

$\boxed{5}$ Multipliziere L mit $\vec{x}^{(0)}$ ← unbekannt

und setze gleich $\vec{x}^{(1)}$

$\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

⇝ LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & \frac{1}{2} & 7500 \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 & 4000 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 2500 \end{array}\right)$$

$x_2 + \frac{1}{2} x_3 = 7500 \Rightarrow x_3 = 5000$

$\frac{4}{5} x_1 = 4000 \Rightarrow x_1 = 5000$

$\frac{1}{2} x_2 = 2500 \Rightarrow x_2 = 5000$

d.h. $\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 5000 \\ 5000 \\ 5000 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = L$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 & 0 \end{pmatrix} = L^2$$

c) $\vec{x}^{(2)} = L\,\vec{x}^{(1)}$

$$\vec{x}^{(3)} = L\,\vec{x}^{(2)} = L\,L\,\vec{x}^{(1)} = L^2\,\vec{x}^{(1)}$$

$$\left(\text{allg.}\quad \vec{x}^{(t)} = L^{t-1}\,\vec{x}^{(1)} = L^t\,\vec{x}^{(0)}\right)$$

$$\vec{x}^{(3)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=L^2} \underbrace{\begin{pmatrix} 7500 \\ 4000 \\ 2500 \end{pmatrix}}_{=\vec{x}^{(1)}} = \begin{pmatrix} 7000 \\ 4200 \\ 3000 \end{pmatrix}$$

d) Suche Lösungen von $L\vec{x} = \vec{x}$ (LGS)

(i)

$$
\begin{aligned}
x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 &= x_1 \quad &&| -x_1\\
\tfrac{4}{5}x_1 &= x_2 \quad &&| -x_2\\
\tfrac{1}{2}x_2 &= x_3 \quad &&| -x_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-x_1 + x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 &= 0\\
\tfrac{4}{5}x_1 - x_2 &= 0\\
\tfrac{1}{2}x_2 - x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

kurz

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
-1 & 1 & \frac{1}{2} & 0\\
\frac{4}{5} & -1 & 0 & 0\\
0 & \frac{1}{2} & -1 & 0
\end{array}\right)
$$

Leslie-Matrix, wobei auf der Diagonale 1 abgezogen wird

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{4}{5} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{array}\right)
\begin{array}{l} |\cdot(-1) \\ |\cdot 5 \\ |\cdot 2 \end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)
\begin{array}{l} (-4) \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ |(-1) \\ \\ \end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

$x_2 - 2x_3 = 0$, $x_3 = s$

$\Rightarrow x_2 = 2x_3 = 2s$

$x_1 - x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0$

$\Rightarrow x_1 = x_2 + \frac{1}{2}x_3$

$= 2s + \frac{1}{2}s = \frac{5}{2}s$

d.h. jeder Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot s, \quad s \in \mathbb{R}$$

löst das LGS

d) (ii)

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot s \,, \; s \in \mathbb{R}$ $\quad s = 2500$ liefert $x_2 = 5000$

also $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 6250 \\ 5000 \\ 2500 \end{pmatrix}$

$\boxed{1}$ a) lese ab $\quad f(1) = 10$

$$f(1) = e^{a\cdot 1} = e^{a} = $$

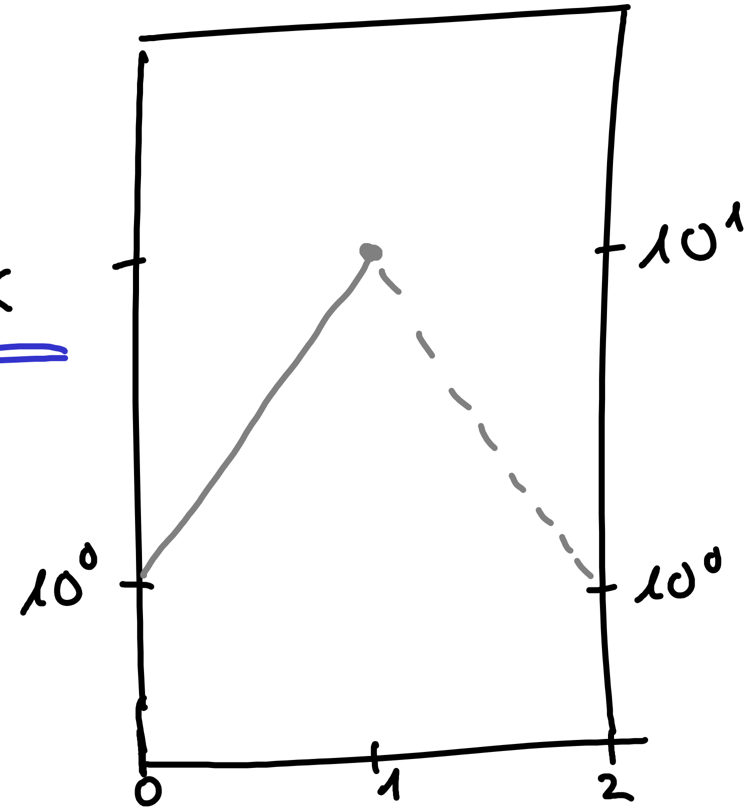
$$\Rightarrow \quad a = \log 10$$

übrigens $\quad f(x) = e^{x\cdot \log 10} = e^{\log(10^x)}$

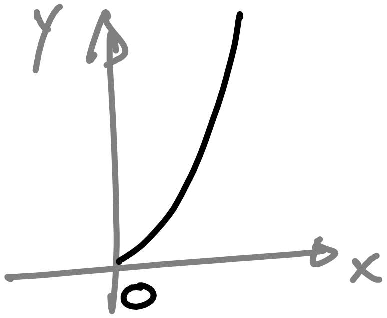
$$= 10^x$$

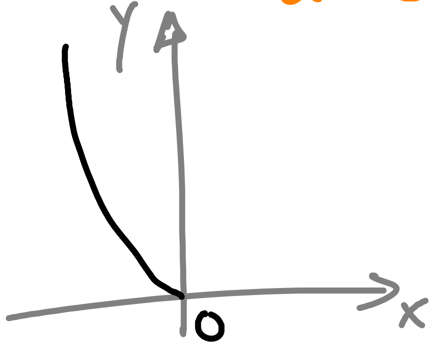
b) allg. $\quad y = e^{ax}$

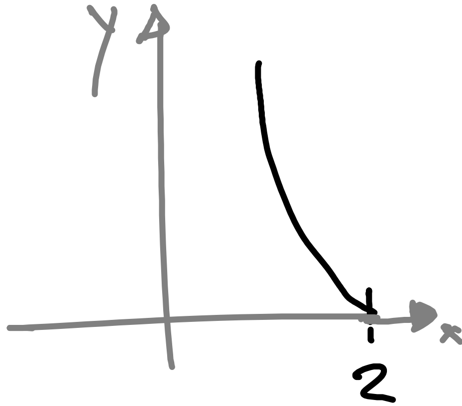
Logarithmieren $\quad \underline{\underline{\log y}} = a\, \underline{\underline{x}}$



c) $y = e^{ax} \xrightarrow[\text{an y-Achse}]{\text{Spiegelung}} e^{-ax} \xrightarrow[\text{um 2 nach rechts}]{\text{Verschiebe}} e^{-a(x-2)}$



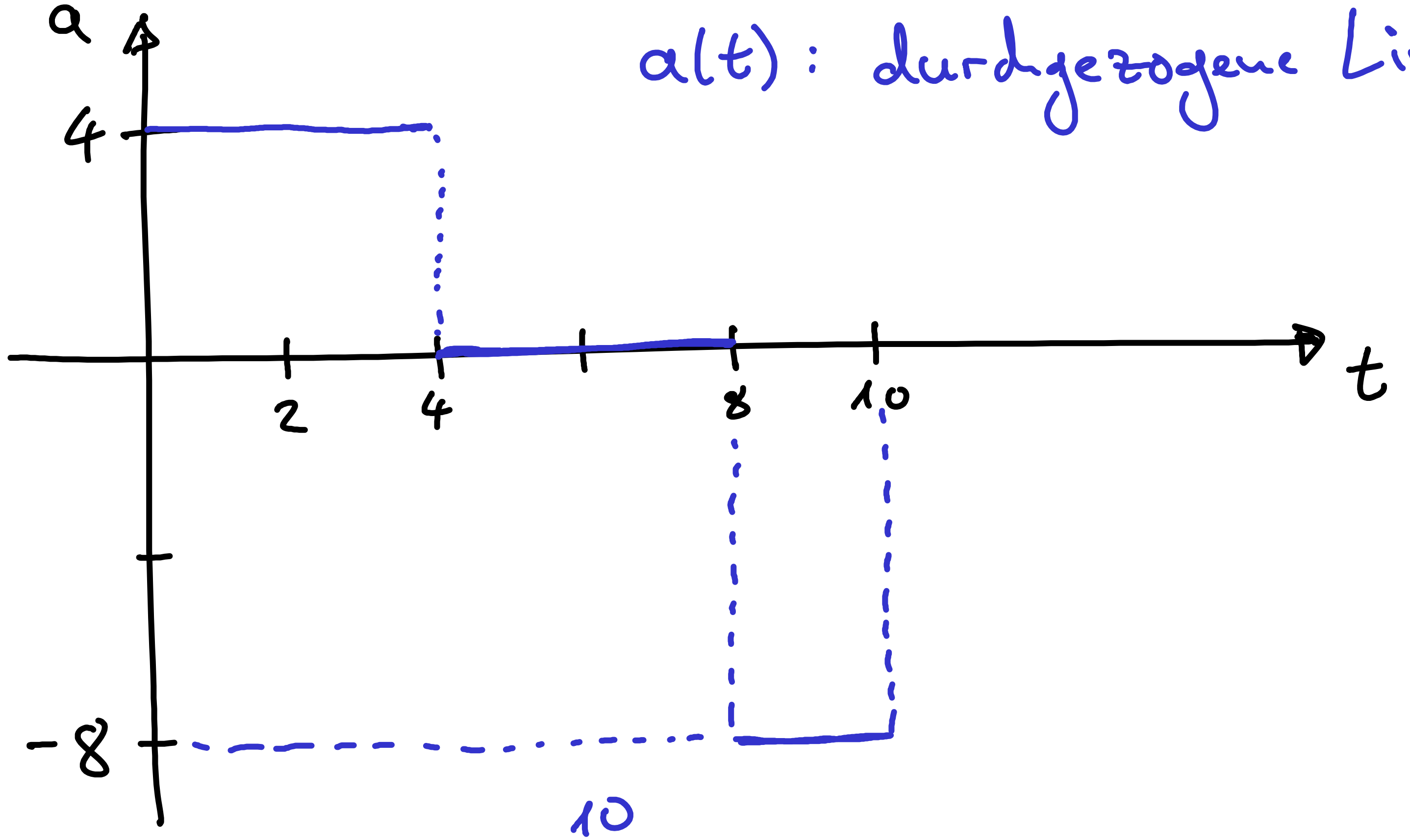




$$\left(e^{-a(x-2)} = e^{a(2-x)} = e^{2a-ax} = \underbrace{e^{2a}}_{\text{Zahl}} \cdot e^{-ax} \right)$$

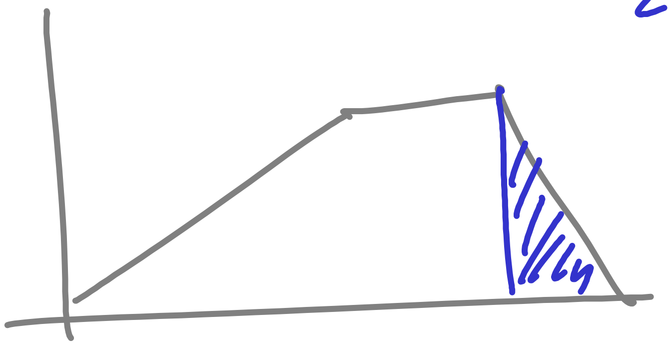
$\boxed{6}$ a)

a(t): durchgezogene Linien

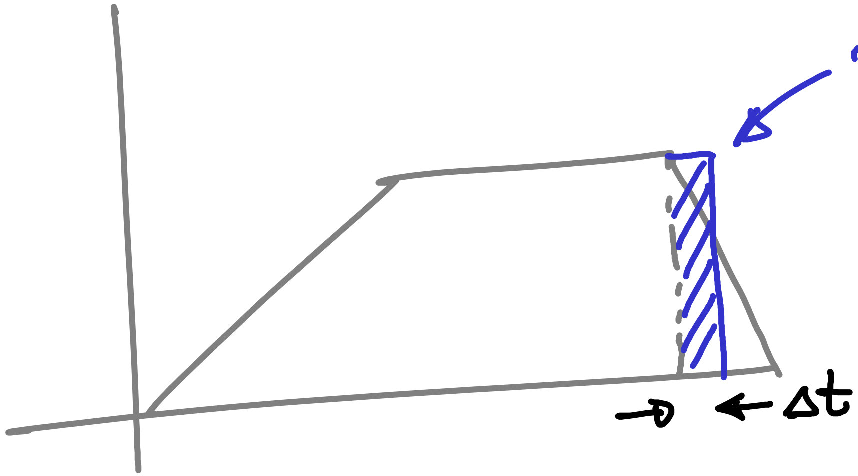


b) Bremsweg $= \int_{8}^{10} v(t)\,dt$ = Dreiecksfläche

$$= \frac{1}{2} \cdot (2\,s) \cdot \left(16\,\frac{m}{s}\right) = 16\,m$$



c)



Rechteck mit gleicher Fläche wie das Dreieck in (b)

d.h. $\Delta t = 1\,s$ $\quad \left(\underbrace{16\,\frac{m}{s}\cdot t}_{\text{Rechteckfl.}} = \underbrace{16\,m}_{\text{Dreieck-Fl. aus b}} \right)$

gesuchter Zeitpunkt: $8\,s + 1\,s = \underline{\underline{9\,s}} = t_K$

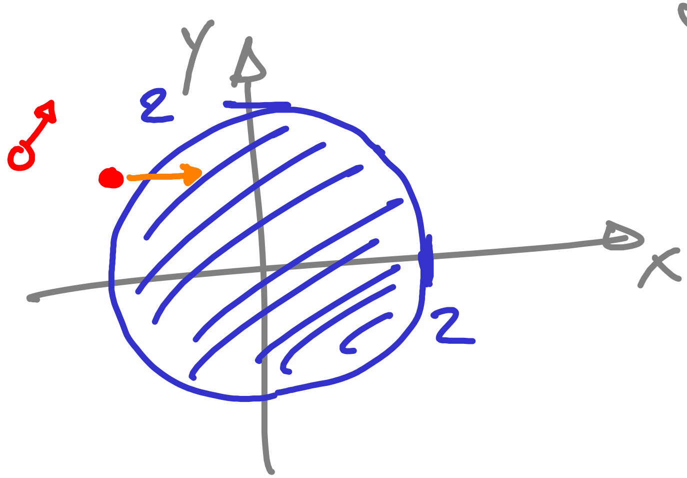
$\boxed{7}$ c)

$$f(x,y) = \underbrace{\frac{1}{1+x^2+y^2}}_{\text{Konzentration}} \geq \underbrace{\frac{1}{5}}_{\text{„mindestens } \frac{1}{5}\text{"}} \qquad \Big|\, 5\cdot(1+x^2+y^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 5 \geq 1 + x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\underbrace{4}_{\text{Radius}^2} \geq x^2+y^2}$$

Kreisinnere eines Kreises mit Radius 2



d)

$$f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$$

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{\text{Änderung in (positiver) x-Richtung (bei festem y)}} \underbrace{(-2,1)}_{\text{„in dem Moment, in dem es losfliegt", d.h. am Startpunkt } (-2,1)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} \cdot \underbrace{2x}_{\text{innere Ableitung}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-2,1) = -\frac{1}{36}(-4) = \frac{1}{9}$$

e) Richtungsableitung in Richtung $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}\underbrace{(-2,1)}_{\text{Startpunkt}} = \underline{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(-2,1), \frac{\partial f}{\partial y}(-2,1)\right)} \cdot \vec{e}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-2,1) = -\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}(2y)\Big|_{\substack{x=-2\\y=1}} = -\frac{1}{18}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(-2,1) = \left(\frac{1}{9}, -\frac{1}{18}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\cdot 18} = \frac{\sqrt{2}}{36}$$

Zusatzfrage: In welche Richtung muss das Männchen fliegen, damit sich die Konz. (zum Startzeitpunkt) maximal erhöht

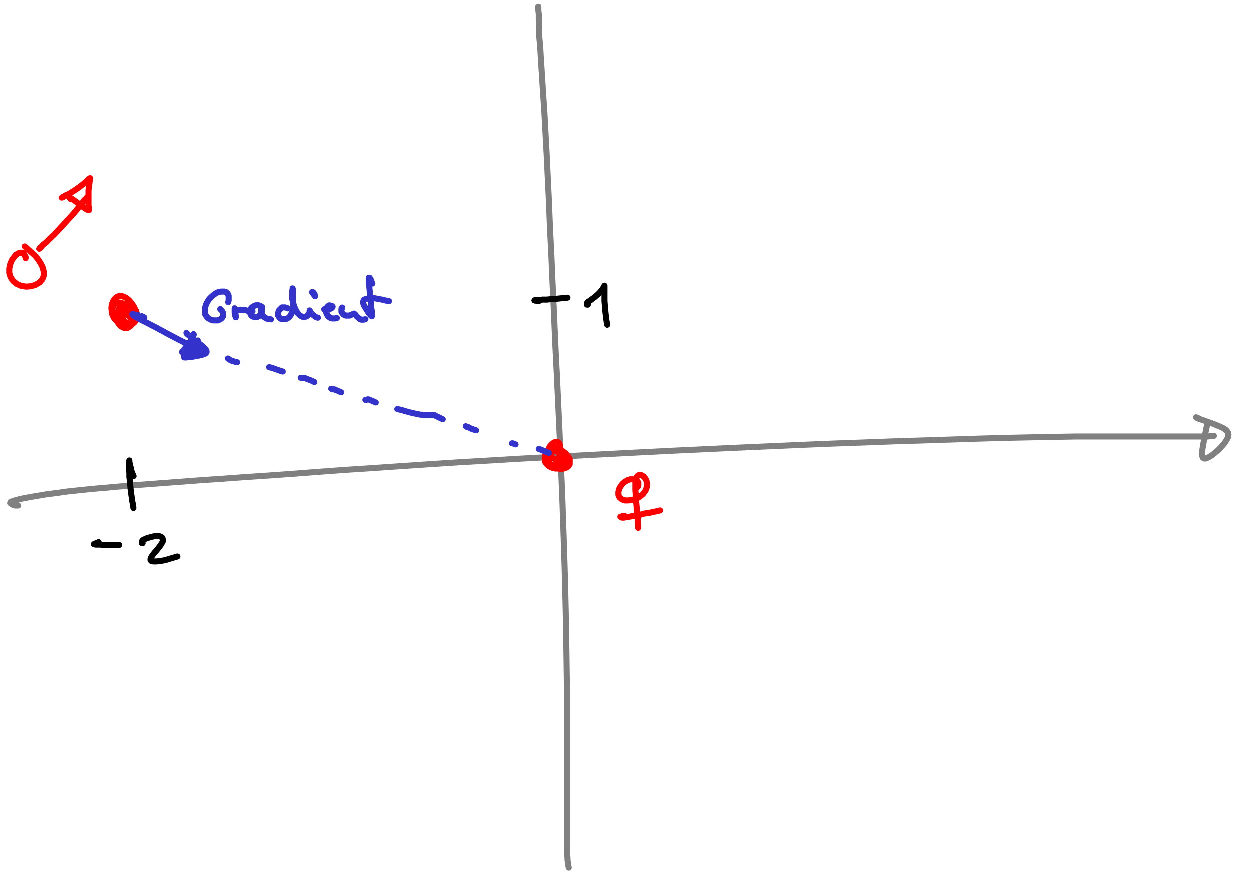
→ anschaulich: zum Ursprung / Weibchen

→ rechnerisch: Der Gradient (als Richtungsvektor) zeigt in die Richtung, in der die Fkt. am stärksten wächst

T wenn man will als Spaltenvektor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(-2,1), \frac{\partial f}{\partial y}(-2,1) \right)$$

$$= \left(\frac{1}{9}, -\frac{1}{18} \right) = \frac{1}{18}(2,-1)$$



Gradient
1
-2

$\boxed{3}$ a) anschaulich: nach unten geöffnete Parabel

mit NST. 1 und 0 $\Rightarrow$ Maximum bei $x = \frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{r}{4}$

rechnerisch: $f(x) = r(1-x)x = rx - rx^2$

$f'(x) = r - 2rx \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$f''(x) = -2r < 0$ also Maximum

$f(\frac{1}{2}) = \frac{r}{4}$

ohne Anschauung: Rand des Def.-Bereichs überprüfen, $f(0) = 0 < \frac{r}{4}$ d.h.

$f(\frac{1}{2}) = \frac{r}{4}$ ist tatsächlich globales Maximum

5)

$$\frac{u_{t+1}}{u_t} = \frac{r(1-u_t)\cancel{u_t}}{\cancel{u_t}} = r(1-u_t)$$

$$\underset{r=2}{=} 2(1-u_t) \overset{!}{>} 1$$

allg: r beliebig

$$r - r u_t > 1$$

$$\Leftrightarrow r-1 > r u_t$$

$$\Leftrightarrow \frac{r-1}{r} > u_t$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2u_t > 1$$

$$\Leftrightarrow 1 > 2u_t \Leftrightarrow \frac{1}{2} > u_t$$

d.h. für $u_t < \frac{1}{2}$ wächst die Population

$\boxed{2}$ a) $N(0) = 50\,000$

b) $2^3 = 8$

c) $N(t) = 50000 \cdot e^{8t}$?

damit wäre $N(1) = 50000 \cdot e^8$

wenn man mit e-Fkt. arbeiten will:

$N(t) = 50000 \cdot e^{at}$ Bestimme geeignetes a

z.B. aus $\left.\begin{aligned} N(1) &= 50000 \cdot 8 \\ &= 5000 \cdot e^a \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ $8 = e^a$ d.h. $a = \log 8$

und $e^{(\log 8)\cdot t} = e^{\log(8^t)} = 8^t$

d) $50000 \cdot 8^t \overset{!}{=} 10^8$

$$\iff 8^t = \frac{10000}{5} = 2000$$

$$\iff t \log 8 = \log 2000$$

$$\iff t = \frac{\log 2000}{\log 8}$$