Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 08/09
Dr. Stefan Keppeler, Jakob Wachsmuth

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 10 (Abgabe am 19.12.2008)

Aufgabe 45 (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie für die Vektorräume aus Aufgabe 41 c) und d) die Dimension und geben Sie jeweils eine Basis an.

b) Seinen U und V Unterräume des $\mathbb{R}^{10}$ mit $\dim U = 6$ und $\dim V = 3$ und Basen $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_6$ von U und $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ von V. Welche Werte kann

$$\dim \operatorname{span}\left(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_6, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\right)$$

annehmen (mit Begründung)? Geben Sie für jeden Fall explizit ein Beispiel an!

Aufgabe 46 (10 Punkte)

Sei P_n der Vektorraum (über $\mathbb{R}$) aller Polynome vom Grad $\leq n \in \mathbb{N}_0$ mit reellen Koeffizienten und punktweiser Addition und skalarer Multiplikation. Die Dimension von P_n ist $n+1$, eine mögliche Basis ist $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$. Weiter sei $L : P_n \to P_n$ gegeben durch $L(p) = 2p' - p''$. Sind die Mengen

$$U_1 := \{p \in P_n \mid L(p) = 0\} \qquad \text{und} \qquad U_2 := \{q \in P_n \mid \exists\, p \in P_n \text{ mit } L(p) = q\}$$

Unterräume von P_n? Geben Sie ggf. die Dimension und eine Basis an.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Linearität von L.

Aufgabe 47 (10 Punkte)

a) Welche Dimension hat der durch die folgenden Vektoren aufgespannte Unterraum des $\mathbb{R}^5$,

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\1\\3\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\\3\\7\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\6\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\4\\6\\0\\0\end{pmatrix}?$$

b) Zeigen Sie, dass im $\mathbb{R}^n$ durch $\|\vec{a}\| := \max\limits_{j \in \{1,\dots,n\}} |a_j|$, für $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$, eine Norm definiert wird.

Aufgabe 48 (10 Punkte)

Überprüfen Sie, ob durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ jeweils ein Skalarprodukt auf V definiert wird!

a) $V = \mathbb{R}^n$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$

b) $V = \mathbb{R}^3$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + 7 a_2 b_2 + 2 a_3 b_3$

c) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2$

d) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 - a_2 b_2$

e) $V = \mathbb{R}^2$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + 3 a_2 b_2$

Hinweis: Die Eigenschaften (S1) und (S2) können Sie für alle Aufgabenteile gleichzeitig überprüfen, denn alle Abbildungen haben die Form $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_j \sum_k \mu_{jk} a_j b_k$ mit $\mu_{kj} = \mu_{jk}$.