Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler, Jakob Wachsmuth

Wintersemester 08/09

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 2 (Abgabe am 24.10.2008, **vor** der Vorlesung)

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Zeigen Sie (mit vollständiger Induktion)!

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Zeigen Sie (mit vollständiger Induktion):

Die Summe der ersten n positiven ungeraden Zahlen ist gleich n^2.

Hinweise: Formulieren Sie die Aussagen zunächst mit der Summenschreibweise.
Für $n \in \mathbb{Z}$ ist $2n$ gerade und $2n-1$ ungerade.

Aufgabe 9 (10 Punkte)

a) Sei $a_1 = 2$ sowie $a_{n+1} = 3a_n + 2$ für $n \geq 1$. Zeigen Sie (mit vollständiger Induktion):

$$a_n = 3^n - 1$$

b) Wo genau liegt der Fehler in folgendem "Induktionsbeweis"?

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $2 \cdot n = 0$.

Induktionsanfang: Für $n = 0$ ist $2 \cdot n = 2 \cdot 0 = 0$.
Induktionsannahme: Die Behauptung gelte für alle $k \leq n$, also $2 \cdot k = 0 \ \forall\, k \leq n$.
Induktionsschritt: Für $k = n + 1$ gilt $k = a + b$ für zwei natürliche Zahlen $a, b \leq n$.
Also ist $2 \cdot (n + 1) = 2 \cdot (a + b) = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 0 + 0 = 0$.

Aufgabe 10 (10 Punkte)

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:
Wird ein Kreis durch n Sekanten in Teilgebiete zerlegt, so läßt er sich mit 2 Farben so einfärben, daß benachbarte Gebiete verschiedene Farben haben.
Hinweis: "Benachbart" bedeutet hier, daß die Gebiete entlang einer Strecke aneinanderstoßen (also nicht nur in einem Punkt).

Aufgabe 11 (10 Punkte)

Berechnen Sie für $x, y \in \mathbb{R}$ (d.h. das Ergebnis soll keine Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{k+n}$ b) $\displaystyle\sum_{k=5}^{n} x^{k}$