

## Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 3 (Abgabe am 31.10.2008)

---

### Aufgabe 12

(10 Punkte)

Berechnen Sie für  $x, y \in \mathbb{R}$

$$a) (x - y) \sum_{k=1}^n x^{n-k} y^{k-1} \qquad b) \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n x^l \binom{l}{k}$$

### Aufgabe 13

(10 Punkte)

Zeigen Sie, dass für  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x > 0$  und  $y \geq 0$  gilt, dass

$$y^n \geq x^n + nx^{n-1}(y - x).$$

HINWEIS: Denken Sie an die Bernoullische Ungleichung!

### Aufgabe 14

(20 Punkte)

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = x^3 + 1, \quad g(x) = \sqrt{x} \quad \text{und} \quad h(x) = x^2 + 5.$$

- Bestimmen Sie jeweils Definitions- und Wertebereich!
- Existieren die folgenden Verknüpfungen? Geben Sie ggf. Definitions- und Wertebereich an!
  - $f \circ g$
  - $g \circ f$
  - $f \circ h$
  - $h \circ f$
  - $g \circ h$
  - $h \circ g$
- Geben Sie  $h \circ f$  und  $f \circ h$  explizit an!

Bitte wenden!

**Aufgabe 15**

(10 Punkte)

Das Pascalsche Dreieck baut man wie folgt aus den Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{k}$  auf:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & \\ & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} \\ & & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ \cdot & \cdot & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & \cdot & \cdot \end{array}$$

Dabei wächst also  $n$  nach unten und  $k$  nach rechts hin. Die Beziehung

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$$

aus der Vorlesung sagt uns, daß am linken und rechten Rand ausschließlich Einsen stehen. Weiter folgt aus der Funktionalgleichung, daß sich alle anderen Einträge jeweils als Summe der beiden rechts und links darüberstehenden ergibt.

- Konstruieren Sie auf diese Weise die ersten 10 Zeilen des Pascalschen Dreiecks!
- Was bedeutet die Beziehung

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

aus der Vorlesung am Pascalschen Dreieck?

- Wie lässt sich die Spiegelsymmetrie des Pascalschen Dreiecks als Beziehung (Formel) zwischen Binomialkoeffizienten ausdrücken?