Universität Tübingen, Mathematisches Institut — Wintersemester 08/09

Dr. Stefan Keppeler, Jakob Wachsmuth

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 5 (Abgabe am 14.11.2008)

Aufgabe 21 (10 Punkte)

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine an jeder Stelle differenzierbare Funktion. Wo sind die folgenden Funktionen differenzierbar? Bestimmen Sie ggf. die Ableitung!

a) $f(x) = \big(g(x)\big)^2 \, \mathrm{e}^x$ b) $f(x) = \dfrac{x\,\mathrm{e}^{g(x)}}{\mathrm{e}^x + 1}$

c) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ d) $f(x) = (x+2)|x+2|$

Hinweis: Die Ergebnisse von a) und b) hängen natürlich von der Ableitung von g ab!

Aufgabe 22 (Implizite Ableitung) (10 Punkte)

Die Funktion $y(x)$ sei gegeben durch

$$x^2y^3 \;+\; 7 \;=\; (x^2-4)y \;+\; 3(x-1)^2\,.$$

Berechnen Sie $y(2)$ und $y'(2)$ und stellen Sie die Tangentengleichung im Punkt $(2, y(2))$ auf!

Aufgabe 23 (10 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte!

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n/2}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n-1}\right)^{n+2}$

Aufgabe 24 (10 Punkte)

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

a) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{Z}$ mit $k \geq -n$. Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

$$\begin{aligned} f(x) &= o\big((x-x_0)^n\big), \qquad x \to x_0 \\ \Longleftrightarrow \quad (x-x_0)^k f(x) &= o\big((x-x_0)^{n+k}\big), \quad x \to x_0 \end{aligned}$$

Dafür schreibt man auch kurz $(x-x_0)^k\, o\big((x-x_0)^n\big) = o\big((x-x_0)^{n+k}\big)$.

b) Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass

$$o\big((x-x_0)^n\big) \;+\; o\big((x-x_0)^m\big) \;=\; o\big((x-x_0)^{\min(n,m)}\big), \quad x \to x_0$$

c) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie die Gültigkeit der Produktregel

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

unter Verwendung der Charakterisierung der Ableitung mit Hilfe von $o(x-x_0)$ (Lemma 4 aus der Vorlesung).