Universität Tübingen, Mathematisches Institut Wintersemester 08/09
Dr. Stefan Keppeler, Jakob Wachsmuth

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 7 (Abgabe am 28.11.2008)

Aufgabe 30 (10 Punkte)

Leiten Sie die folgenden Funktionen ab.

a) $f_1(x) := a^x$ für $a > 0$, b) $f_2(x) := x^x$ für $x > 0$,

c) $f_3 := h \circ g \circ f$, d) $f_4 := h \circ (1/g)$, e) $f_5 := \log(h)$,

wobei $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beliebige differenzierbare Funktionen sind.

Aufgabe 31 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihen von

a) $\dfrac{1}{4+x^2}$ um Null, b) $\dfrac{1}{5x-1}$ um Null, c) $\dfrac{1}{1+2x}$ um $x_0 = 2$,

und geben Sie an, für welche x die Reihen konvergieren.

Aufgabe 32 (10 Punkte)

Berechnen Sie die Taylorreihen von

a) $\sinh x$ um $x_0 = 0$, b) $\cosh x$ um $x_0 = 0$, c) $\operatorname{Arcoth} x$ um $x_0 = 3$.

Wo konvergieren die Reihen gegen die jeweilige Funktion?

Hinweis: Denken Sie bei c) an die Herleitung der Taylorreihe von log in der Vorlesung!

Aufgabe 33 (10 Punkte)

Skizzieren Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) \;=\; \exp\left(-1/x^4\right).$$

Berechnen Sie die Taylorreihe von f um Null. Für welche x konvergiert die Reihe? Für welche x konvergiert die Reihe gegen $f(x)$?

Aufgabe 34 (Extremwert-Test) (10 Punkte)

Eine Funktion f sei auf dem Intervall $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ n mal stetig differenzierbar und es gelte für $x_0 \in I$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0\,, \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0\,,$$

Zeigen Sie, dass dann die folgenden Implikationen gelten:

(i) n ist ungerade $\Longrightarrow$ x_0 ist keine Extremalstelle.

(ii) n gerade, $f^{(n)}(x_0) < 0$ $\Longrightarrow$ x_0 ist lokale Maximalstelle.

n gerade, $f^{(n)}(x_0) > 0$ $\Longrightarrow$ x_0 ist lokale Minimalstelle.

Definition: x_0 heißt lokale Maximal- bzw. Minimalstelle von f, wenn gilt:

$$f(x) < f(x_0) \;\text{ bzw. }\; f(x) > f(x_0) \quad \forall\, x \neq x_0 \quad \text{aus einer Umgebung von } x_0\,.$$

x_0 heißt Extremalstelle von f, falls x_0 lokale Maximal- oder Minimalstelle ist.

Hinweise: Stellen Sie $f(x)$ in einer Umgebung von x_0 durch das $n-1$-te Taylorpolynom plus Restglied dar. Aus $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ folgt natürlich auch $f^{(n)}(\xi) \neq 0$ $\forall\, \xi$ in einer kleinen offenen Umgebung von x_0.