Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler, Jakob Wachsmuth Wintersemester 08/09

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 8 (Abgabe am 05.12.2008)

Aufgabe 35 (10 Punkte)

Bestimmmen Sie die folgenden Grenzwerte (mit Erklärung/Herleitung)!

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(2x)}{(\cos x - 1)}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\log x)(\log x)}{\sqrt{x}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{x^2}-1)^3}{x^6+3x^7}$

Aufgabe 36 (10 Punkte)

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ hat die Funktion $f_{a,b}$ definiert durch

$$f_{a,b}(x) \;=\; \frac{\sqrt{1+2x^2}}{1-ax^4} e^{-bx^2}$$

bei Null eine Maximastelle, für welche eine Minimalstelle? Belegen Sie Ihre Antwort!

Hinweis: Taylorentwicklung der einzelnen Faktoren!

Aufgabe 37 (10 Punkte)

Zur Taylorreihe des Tangens:

a) Zeigen Sie, dass die Taylorreihe des Tangens um Null nur ungerade Potenzen enthält, also

$$\tan(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}.$$

b) Zeigen Sie, dass die Koeffizienten a_n für alle $n \in \mathbb{N}$ der folgenden Rekursionsformel genügen:

$$a_n \;=\; \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-\nu}}{(2(n-\nu))!} a_\nu.$$

c) Geben Sie a_0 bis a_3 und eine Schranke an den Konvergenzradius der Reihe an.

Hinweise: Verwenden Sie bei a), dass $\tan(-x) = -\tan(x)$ und dass zwei Potenzreihen genau dann übereinstimmen, wenn alle Summanden gleich sind. Setzen Sie bei b) die bekannten Reihen für Sinus und Kosinus in die Gleichung $\sin(x) = \cos(x)\tan(x)$ ein und wenden Sie dann den Cauchy-Produktsatz an.

Aufgabe 38 (10 Punkte)

Sei $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$. Zeigen Sie:

a) $\mathbb{Z}_n$ mit Addition modulo n (d.h. z.B. $2 + (n-1) = 1$) ist eine Gruppe.
b) $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ mit Addition und Multiplikation modulo n ist kein Körper, wenn n keine Primzahl ist.

Aufgabe 39 (10 Punkte)

a) Sei $(\{1, A, B\}, \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element 1. Füllen Sie die folgende Multiplikationstabelle aus.

$\cdot$	1	A	B
1			
A			
B			

Begründen Sie, dass es nur eine Lösung (also nur eine dreielementige Gruppe) gibt.

b) Ergänzen Sie die folgende Additionstabelle so, dass $(\{0, 1, A, B\}, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

$+$	0	1	A	B
0				
1	1	0		
A	A	B		1
B	B			

c) $(\{0, 1, A, B\}, +, \cdot)$ mit den Additions- und Multiplikations-Tabellen aus den Aufgabenteilen a) und b) ist ein Körper (genannt $\mathbb{F}_4$). Überprüfen Sie explizit das Distributivgesetz am Beispiel $(A + 1) \cdot B = A \cdot B + 1 \cdot B$.