

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 9 (Abgabe am 12.12.2008)

Aufgabe 40

(10 Punkte)

Zeigen Sie:

- Die Menge der bijektiven Abbildungen $f : A \rightarrow A$, $A \neq \emptyset$ bildet bezüglich der Komposition (also $(f \circ g)(x) = f(g(x)) \forall x \in A$) eine Gruppe.
- Sei A zweielementig, also $A = \{a, b\}$. Dann ist die Gruppe aus a) abelsch.
- Sei nun $A = \{a, b, c\}$. Dann ist die Gruppe aus a) nicht abelsch. Folgern Sie daraus, dass dies für alle A mit mindestens drei Elementen so ist.

Aufgabe 41

(10 Punkte)

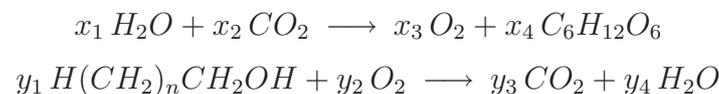
Welche der folgenden Mengen M sind Vektorräume über K ?

- $M = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{Q}$,
- $M = \mathbb{Q}^2$, $K = \mathbb{R}$,
- $M = \mathbb{Q}^2$, $K = \mathbb{Q}$,
- $M = \{\text{Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad } \leq 4 \text{ und Nullstellen bei } -1 \text{ und } 5\}$, $K = \mathbb{R}$
- $M = \{\text{Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad } \geq 1\}$, $K = \mathbb{R}$

Aufgabe 42

(10 Punkte)

Formulieren Sie für jede der chemischen Reaktionen



(für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$) ein lineares Gleichungssystem für die Werte x_i bzw. y_j aus der Bedingung, dass auf beiden Seiten des Reaktionspfeils dieselbe Anzahl von H -, C - und O -Atomen stehen. Bestimmen Sie die jeweilige Lösungsmenge und darin die Teilmenge derjenigen Lösungen, bei denen alle x_i bzw. y_j nichtnegative ganze Zahlen sind.

Aufgabe 43

(10 Punkte)

Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren des \mathbb{R}^3 linear abhängig?

- $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta^2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 44

(10 Punkte)

Zeigen Sie:

- Die Menge aller stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$, genannt $C([a, b])$, bilden einen Vektorraum über den reellen Zahlen.
- $f(x) = 1$, $g(x) = \sin(x)$ und $h(x) = \cos(x)$ sind linear unabhängig in $C([-\pi, \pi])$.
- $f(x) = 1$, $g(x) = \cos^2(x)$ und $h(x) = \cos(2x)$ sind linear abhängig in $C([-\pi, \pi])$.

HINWEIS: Nehmen Sie bei b) an, die Funktionen seien linear abhängig und führen Sie dies zum Widerspruch!