Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler, Jakob Wachsmuth Wintersemester 08/09

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 9 (Abgabe am 12.12.2008)

Aufgabe 40 (10 Punkte)

Zeigen Sie:

a) Die Menge der bijektiven Abbildungen $f : A \to A$, $A \neq \emptyset$ bildet bezüglich der Komposition (also $(f \circ g)(x) = f(g(x))\ \forall\, x \in A$) eine Gruppe.

b) Sei A zweielementig, also $A = \{a, b\}$. Dann ist die Gruppe aus a) abelsch.

c) Sei nun $A = \{a, b, c\}$. Dann ist die Gruppe aus a) nicht abelsch. Folgern Sie daraus, dass dies für alle A mit mindestens drei Elementen so ist.

Aufgabe 41 (10 Punkte)

Welche der folgenden Mengen M sind Vektorräume über K?

a) $M = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{Q}$, b) $M = \mathbb{Q}^2$, $K = \mathbb{R}$, c) $M = \mathbb{Q}^2$, $K = \mathbb{Q}$,

d) $M = \{$Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad ≤ 4 und Nullstellen bei -1 und 5 $\}$, $K = \mathbb{R}$

e) $M = \{$Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad ≥ 1 $\}$, $K = \mathbb{R}$

Aufgabe 42 (10 Punkte)

Formulieren Sie für jede der chemischen Reaktionen

$$x_1\, H_2O + x_2\, CO_2 \longrightarrow x_3\, O_2 + x_4\, C_6H_{12}O_6$$

$$y_1\, H(CH_2)_nCH_2OH + y_2\, O_2 \longrightarrow y_3\, CO_2 + y_4\, H_2O$$

(für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$) ein lineares Gleichungssystem für die Werte x_i bzw. y_j aus der Bedingung, dass auf beiden Seiten des Reaktionspfeils dieselbe Anzahle von H-, C- und O-Atomen stehen. Bestimmen Sie die jeweilige Lösungsmenge und darin die Teilmenge derjenigen Lösungen, bei denen alle x_i bzw. y_j nichtnegative ganze Zahlen sind.

Aufgabe 43 (10 Punkte)

Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$ linear abhängig?

a) $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta^2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}.$

Aufgabe 44 (10 Punkte)

Zeigen Sie:

a) Die Menge aller stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$, genannt $C([a, b])$, bilden einen Vektorraum über den reellen Zahlen.

b) $f(x) = 1$, $g(x) = \sin(x)$ und $h(x) = \cos(x)$ sind linear unabhängig in $C([-\pi, \pi])$.

c) $f(x) = 1$, $g(x) = \cos^2(x)$ und $h(x) = \cos(2x)$ sind linear abhängig in $C([-\pi, \pi])$.

Hinweis: Nehmen Sie bei b) an, die Funktionen seien linear abhängig und führen Sie dies zum Widerspruch!