Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler, Jakob Wachsmuth

Wintersemester 08/09

Mathematik I für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 11 (Abgabe am 09.01.2009)

Aufgabe 49 (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie eine ON-Basis für $U \subset \mathbb{R}^4$,

$$U = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

bezüglich des kanonischen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^4$.

b) Bestimmen Sie mithilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bezüglich des Skalarprodukts aus Aufgabe 48 e). Beginnen Sie mit den l.u. Vektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 50 (10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c}$ für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$.

b) Geben Sie $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ an, für die $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

Aufgabe 51 (10 Punkte)

Zeigen Sie: Die Einheitsvektoren für Kugelkoordinaten,

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix},$$

bilden (an jedem Punkt) (i) eine ONB des $\mathbb{R}^3$ bezüglich des kanonischen Skalarprodukts und (ii) ein Rechtssystem (in der angegebenen Reihenfolge). Berechnen Sie außerdem die Geschwindigkeit in Polarkoordinaten, d.h. berechnen Sie $\dot{\vec{x}}$ für

$$\vec{x}(t) = r(t) \begin{pmatrix} \sin(\theta(t))\,\cos(\phi(t)) \\ \sin(\theta(t))\,\sin(\phi(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix},$$

und drücken Sie das Ergebnis als Linearkombination von $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ und $\vec{e}_\phi$ aus.

Aufgabe 52 (10 Punkte)

Skizzieren Sie die folgenden Kurven und berechnen Sie jeweils Geschwindigkeit und Beschleunigung, sowie deren Beträge:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3\cos(-t) \\ 3\sin(-t) \\ 2t \end{pmatrix}, \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} (1+\cos t)\cos t \\ (1+\cos t)\sin t \end{pmatrix}.$$

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!